

TNS - Traitement Numérique du Signal
Support de cours

F. Morain-Nicolier

Table des matières

1 Signaux numériques	1
1.1 Applications	1
1.2 Signaux numériques	2
1.3 Notation mathématique des signaux discrets	3
1.4 Signaux élémentaires	3
1.5 Combinaisons de signaux élémentaires	4
1.6 Échantillonnage	6
2 Systèmes numériques	8
2.1 Étude d'un système discret simple	8
3 Principales propriétés de la TZ	9
3.1 Définition	9
3.2 Domaine de convergence	10
3.3 Signaux élémentaires	10
3.4 Propriétés	10
3.5 TZ inverse	11
3.6 Résolution d'équations aux différences	12
4 Filtres numériques	12
4.1 Filtres (généralités)	12
4.1.1 Filtre RIF	12
4.1.2 Filtre RII	13
4.1.3 Comparaison	13
4.2 Fonctions de transfert	14
4.3 Réponses fréquentielles	14
4.4 Stabilité des filtres numériques	14
4.5 Représentation par pôles et zéros	14
4.6 Structures de réalisation	15
5 Quelques filtres RIF	15
5.1 Filtres RIF déivateurs	15
5.2 Filtres de lissage	16
5.3 Lissage et dérivation	18
6 Synthèse de filtres numériques	18
6.1 Rappels sur les filtres analogiques	18
6.2 Filtre RII	20
6.3 Transformations de fonctions de transfert	21
6.4 Filtre RIF	22
6.5 Conclusion	24

1 Signaux numériques

1.1 Applications



1.2 Signaux numériques

Un signal est le support physique d'une information (ex : signaux sonores, visuels)

- signaux continus (analogiques),
- discrets (échantillonnés - *sampled*),
- numériques (échantillonnés et quantifiés) : *digital signal*

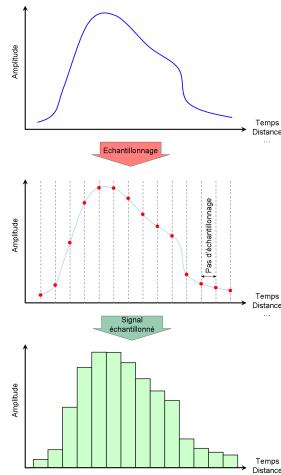


FIGURE 1 – numérisation

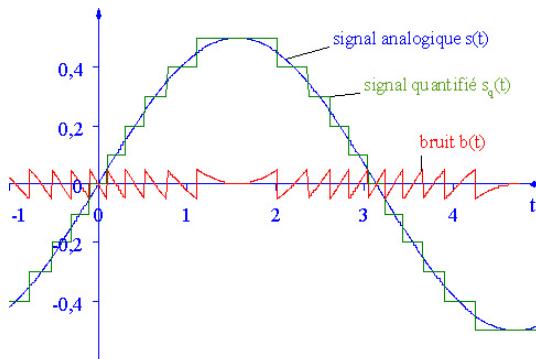


FIGURE 2 – numérisation

Question 1^[1] - Par rapport à un signal analogique, un signal numérique est :

1. plus fidèle à l'information initiale
2. plus robuste au bruit
3. plus durable dans le temps

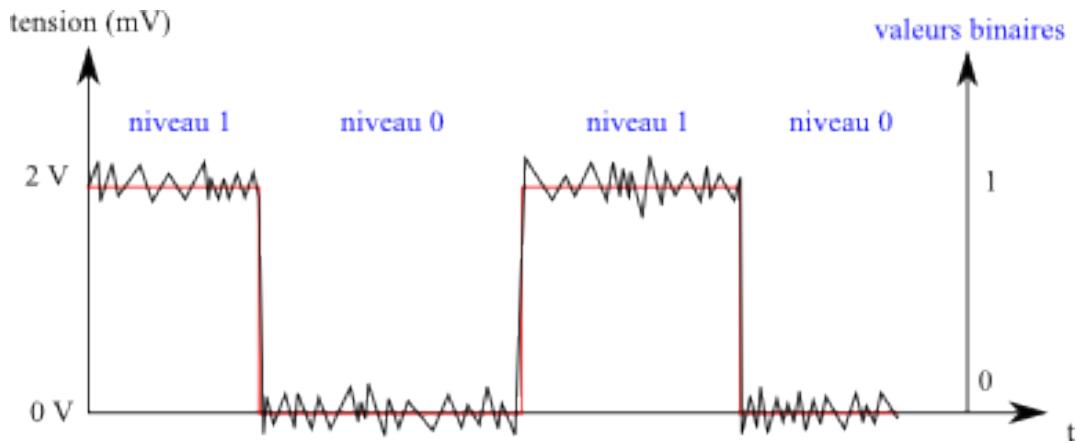


FIGURE 3 – Signal bruité

1.3 Notation mathématique des signaux discrets

Un signal discret est une **liste ordonnée** de valeurs réelles ou complexes.

En mathématique, on le représente donc par **une suite numérique**

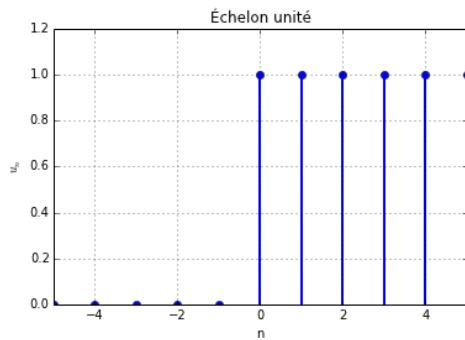
(Définition) Une **suite numérique** $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une application de \mathbb{N} sur \mathbb{R} (ou \mathbb{C}). u_n est le **terme général de la suite**.

Le terme général sera noté u_n ou $u(n)$.

1.4 Signaux élémentaires

— Échelon unité

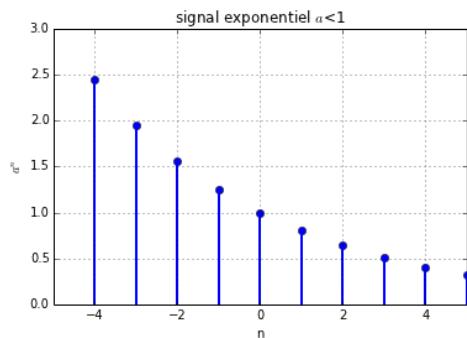
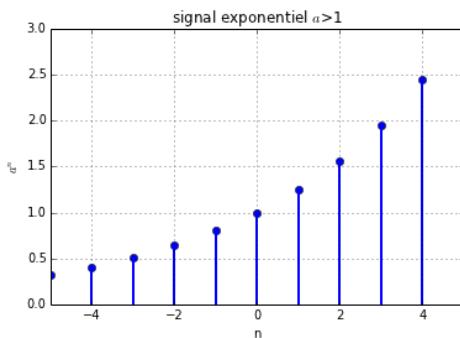
$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



— Signal exponentiel

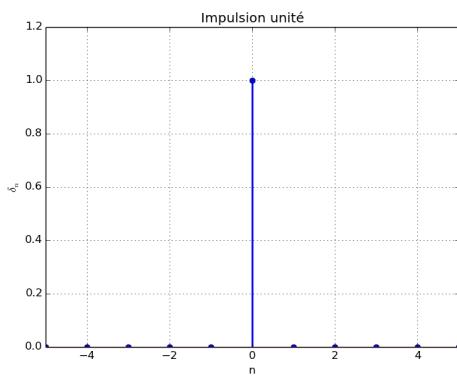
$$x_n = a^n$$

(suite géométrique)



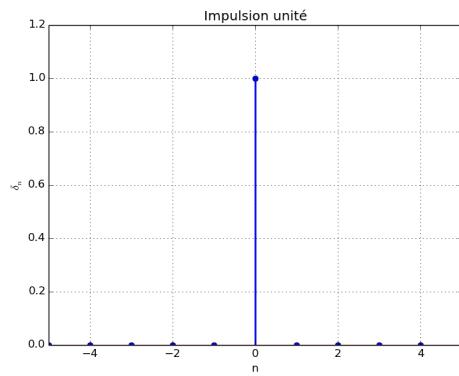
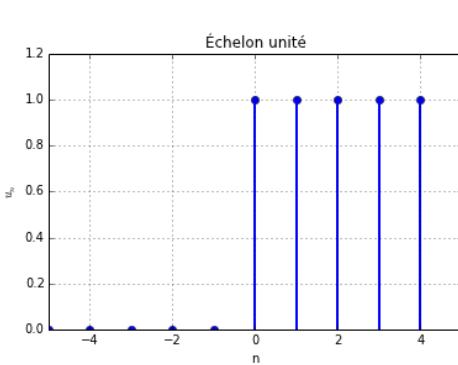
— impulsion unité

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$



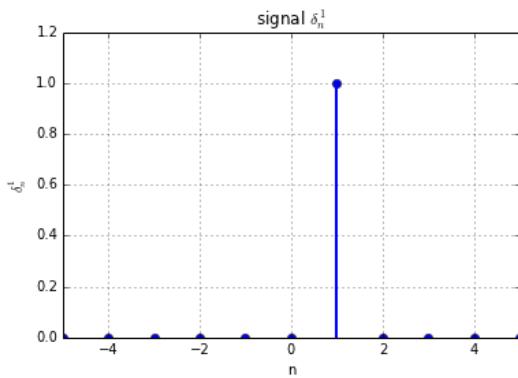
1.5 Combinaisons de signaux élémentaires

Considérons l'échelon et l'impulsion unité :



Cherchons à construire u à partir de δ .

Soit δ l'impulsion unité, voici le signal δ_1



Question 2² - L'expression mathématique de δ_1 est

1. $\delta(n - 1)$
2. $\delta(1 - n)$
3. $\delta(n + 1)$
4. $\delta(1 + n)$

On peut donc écrire

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \delta(n - 2) + \dots$$

donc

$$u(n) = \sum_k \delta(n - k)$$

De même, le signal exponentiel $x(n) = a^n$ peut s'écrire

$$x(n) = \delta(n) + a\delta(n - 1) + a^2\delta(n - 2) + \dots$$

soit

$$x(n) = \sum_k a^k \delta(n - k)$$

En généralisant, tout signal discret peut s'écrire comme une somme infinie pondérée d'impulsions unités.

$$s(n) = a_0\delta(n) + a_1\delta(n - 1) + a_2\delta(n - 2) + \dots$$

ou encore

$$s(n) = \sum_k a_k\delta(n - k)$$

(notez bien cette équation !)

1.6 Échantillonnage

Revenons sur l'échelon unité :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

que l'on peut également écrire comme :

$$u_n = U(nT_e)$$

avec

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow u$ est la version **échantillonnée** de U .

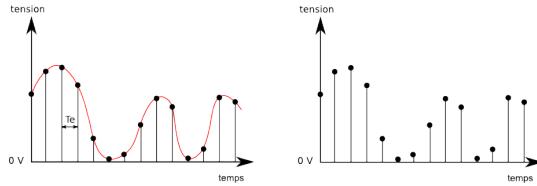


FIGURE 4 – Signal échantillonné

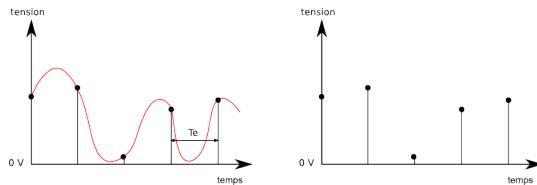
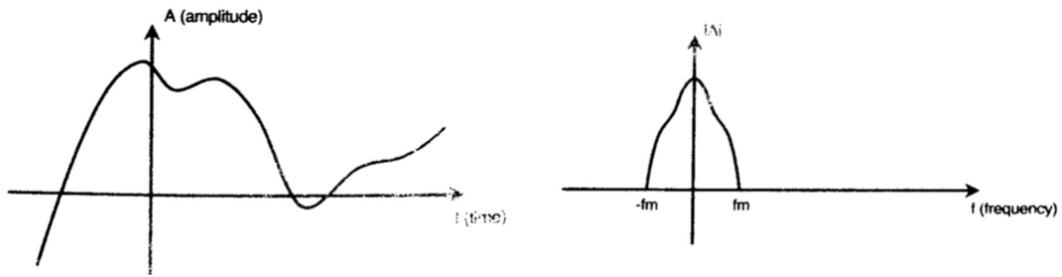


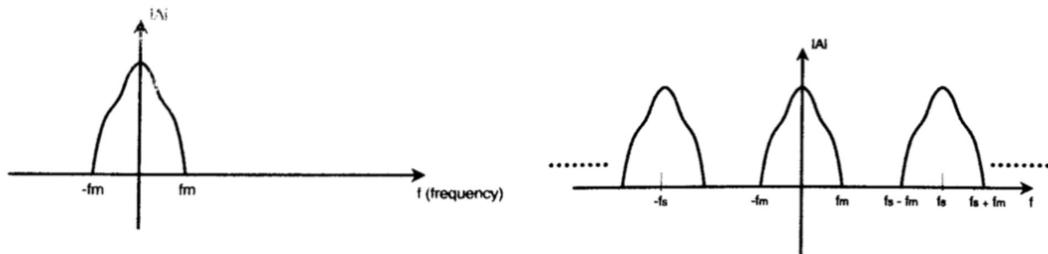
FIGURE 5 – Signal mal échantillonné

Comment choisir la fréquence d'échantillonnage ?

Observons le contenu fréquentiel d'un signal qui ne comporte aucunes fréquences supérieures à f_m



Si l'on échantillonne à une fréquence f_s , le contenu fréquentiel est répété à chaque f_s .



Question 3³ - Pour que l'on puisse obtenir un signal échantillonné correct, la fréquence d'échantillonnage f_s doit vérifier :

1. $f_s > f_m$
2. $f_s < f_m$
3. $f_s > 2f_m$
4. $f_s < 2f_m$
5. $f_s > \frac{1}{2}f_m$
6. $f_s < \frac{1}{2}f_m$

Lorsque $f_s < 2f_m$, les contenus fréquentiels se recouvrent.

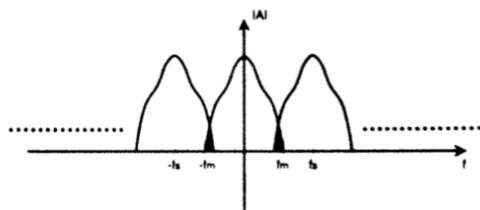


FIGURE 6 – Spectre d'un signal échantillonné

(Théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon) La représentation discrète d'un signal par des échantillons régulièrement espacés exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal

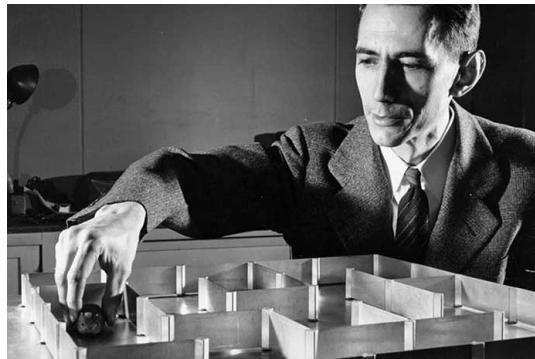


FIGURE 7 – Claude Shannon (1916–2001)

Également inventeur de la machine ultime⁴

2 Systèmes numériques

2.1 Étude d'un système discret simple

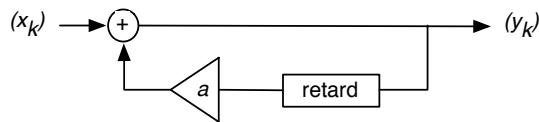


FIGURE 8 – système discret simple

$$y_k = x_k + ay_{k-1}. \quad (0)$$

- C'est une **équation aux différences** (simple)
- Cherchons à exprimer explicitement (y_k) en fonction de (x_k)

On a donc

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^k a^{k-n} x_n.$$

Reformulons la sortie en posant

$$h_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n < 0 \\ a^n & \text{si } n \geq 0 \end{cases}.$$

On a donc

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{k-n} x_n$$

y est le résultat du produit de convolution entre h et x .

4. <http://www.instructables.com/id/The-Most-Useless-Machine/>

- h est la réponse impulsionnelle du système
- S : système linéaire et invariant par translation
- h est suffisant pour entièrement caractériser le système S :

$$h = S(\delta)$$

$$x(n) = \sum_k a_k \delta(n - k)$$

$$y(n) = \sum_k x(n)h(k - n)$$

(h_n) est donc la réponse impulsionnelle du système.

- Cherchons la réponse à une entrée

$$x_k = z^k$$

où z est un nombre complexe fixé.

- Montrons alors que

$$y_k = \frac{z}{z - a} x_k.$$

$$H(z) = \frac{z}{z - a}$$

est la **fonction de transfert** du filtre.

- C'est une fonction de la variable z , définie dans le domaine $|z| > |a|$.
- Un calcul analogue au précédent nous donne H en fonction de h :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}.$$

$H(z)$ est donc la **transformée en z** de (h_n) , avec

$$\text{Z}[f_n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

- quelles sont ses propriétés ?
- quelles sont ses conditions d'existence et de convergence ?

⇒ **suites et séries numériques et de fonctions**

3 Principales propriétés de la TZ

3.1 Définition

(Définition) La **transformée en z** d'un signal discret (x_n) est

$$X(z) = \text{Z}[f_n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}$$

où z est une variable complexe.

- La TZ peut-être considérée comme une généralisation de la transformée de Fourier (poser $z = e^{i\omega}$)
- La TZ constitue l'outil privilégié pour l'étude des systèmes discrets.
- Elle joue un rôle équivalent à la transformée de Laplace

Par exemple, la TZ permet de représenter un signal possédant une infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombres.

3.2 Domaine de convergence

La TZ n'a de sens que si l'on précise le domaine des valeurs de z pour lesquelles la série existe.

Nous montrerons (en Ma3) que le **domaine de convergence** de $X(z)$ est **un anneau du plan complexe** : une TZ converge si

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

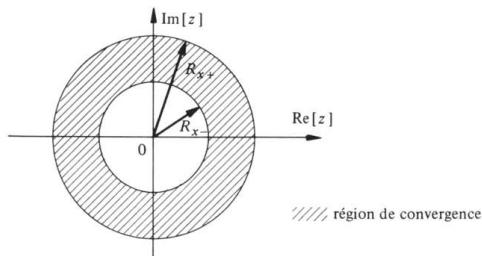


FIGURE 9 – Domaine de convergence d'une TZ

3.3 Signaux élémentaires

- TZ de l'impulsion unité

$$Z[\delta_n] = 1$$

- TZ de l'échelon unité

$$Z[u_n] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- TZ du signal exponentiel

$$Z[a^n u_n] = \frac{z}{z - a}$$

- TZ de la rampe

$$Z[n u_n] = \frac{z}{(z - 1)^2}$$

3.4 Propriétés

(Linéarité) Soit $s_n = ax_n + by_n$ alors

$$S(z) = aX(z) + bY(z).$$

- Quel est le domaine de convergence ? (réponse en Ma3)

(Séquence retardée) Si $y_n = x_{n-n_0}$ alors

$$Y(z) = z^{-n_0} X(z).$$

- En particulier, si $y_n = x_{n-1}$, $Y(z) = z^{-1} X(z)$.

(Séquence avancée) Si $y_n = x(n + n_0)$ alors

$$Y(z) = z^{n_0} \left[X(z) - \sum_{p=0}^{n_0-1} x(p)z^{-p} \right]$$

- $Z[x(n+1)] = z(X(z) - x(0))$,
- $Z[x(n+2)] = z^2(X(z) - x(0) - z^{-1}x(1))$.

(Dérivée) La dérivée d'une TZ multipliée par $-z$ est la TZ du signal multiplié par n :

$$-z \frac{dX(z)}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx_n z^{-n} = Z[nx_n]$$

(Convolution) La convolution discrète étant définie par

$$x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_n,$$

la TZ est

$$Z[x_n * y_n] = X(z)Y(z).$$

3.5 TZ inverse

À partir de la TZ $X(z)$ d'un signal, l'original x_n peut être retrouvé de plusieurs manières :

- en développant $X(z)$ en une série (puissance par exemple)
- en utilisant le théorème des résidus pour calculer

$$x_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} X(z) z^{n-1} dz$$

où Γ est un lacet entourant l'origine, situé dans la couronne de convergence et orienté dans le sens positif.

- par identification des termes (avec éventuellement un formulaire).

Exemple :

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}}\right] \quad (1)$$

- Le théorème des résidus indique que l'intégrale sur un contour fermé C d'une fonction complexe holomorphe $F(z)$ rationnelle vaut

$$\int_C F(z) dz = 2i\pi \sum_{p_i \in \mathbb{C}} \text{Résidu}(p_i)$$

où p_i est un pôle de $F(z)$.

(*Fonction holomorphe = fonction à valeurs complexes, définie et dérivable en tout point d'un sous-ensemble ouvert du plan complexe.*)

si p_i est un pôle simple : $\text{Résidu}(p_i) = \lim_{z \rightarrow p_i} (z - p_i)F(z)$

- Exemple : calcul de $Z^{-1}\left[\frac{1}{1+az^{-1}}\right]$.

3.6 Résolution d'équations aux différences

- Les systèmes discrets sont souvent représentés par une équation aux différences.
- Cette équation donne la sortie en fonction des échantillons présents et passés du signal d'entrée, ainsi que les échantillons passés de la sortie (« mémoire »). Par exemple

$$y(n) = 2y(n-1) + 3x(n) - 2x(n-2). \quad (2)$$

Dans le cas général, on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m). \quad (3)$$

Donc, en appliquant la TZ à gauche et à droite :

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z). \quad (4)$$

La résolution de l'équation aux différences, c'est-à-dire l'obtention de $y(n)$, est donc possible en :

- obtenir la TZ de l'équation aux différences,
- manipuler la transformée pour obtenir $Y(z)$,
- appliquer la TZ inverse pour obtenir $y(n)$.

Exemple : résoudre $x_{n+1} = x_n + 2$ avec $x_0 = 3$.

4 Filtres numériques

4.1 Filtres (généralités)

Il existe deux formes élémentaires de filtres numériques, selon leur réponse impulsionale :

- Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) - *Finite Impulse Response (FIR)*
- Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) - *Infinite Impulse Response (IIR)*

4.1.1 Filtre RIF

Exemple

Considérons le filtre décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = 0,25x(n) + 0,5x(n-1) + 0,25x(n-2). \quad (5)$$

Sa transformée en z est

$$H(z) = 0,25 + 0,5z^{-1} + 0,25z^{-2} \quad (6)$$

On peut donc aisément donner un schéma-bloc équivalent à l'équation aux différences.

La sortie $y(n)$ d'un filtre RIF ne dépend que d'un nombre M fini d'entrées $x(n - m)$. Il s'agit d'un filtre non-récuratif.

Son équation aux différences est de la forme

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n - m). \quad (7)$$

Sa TZ est de la forme

$$H(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m}. \quad (8)$$

Il est toujours possible de représenter un tel filtre par un schéma-bloc.

4.1.2 Filtre RII

Exemple

Considérons le filtre décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2). \quad (9)$$

Sa transformée en z est

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}. \quad (10)$$

On peut donc aisément donner un schéma-bloc équivalent à l'équation aux différences.

La sortie $y(k)$ d'un filtre RII dépend

- d'un nombre M fini d'entrées $x(k - m)$.
- et d'un nombre N fini de sorties retardées $y(k - n)$.

Son équation aux différences est de la forme

$$\sum_{n=0}^N a_n y(k - n) = \sum_{m=0}^M b_m x(k - m). \quad (11)$$

Sa TZ est de la forme

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (12)$$

Il est toujours possible de représenter un tel filtre par un schéma-bloc.

4.1.3 Comparaison

Filtre RIF

- (+) Le délai de réponse est le même pour toutes les fréquences. La phase d'un filtre non-récuratif est linéaire avec la fréquence. On dit que c'est un filtre linéaire. \Rightarrow Le signal n'est pas dispersé par le filtrage.
- (+) Les filtres non-récuratifs sont stables. Leur réponse est finie :

$$|x_n| < \infty \Rightarrow |h * x_n| < \infty \quad (13)$$

- (+) Il existe des méthodes simples pour les synthétiser (*ie* les concevoir).

Filtre RIF

- (-) Cher en réalisation. Beaucoup d'amplificateurs et de retards : beaucoup de calculs.
- (-) Le retard entre l'entrée et la sortie correspond à la longueur du filtre (nb de coefficients). Ce retard peut être long.

Filtre RII

- (+) Faible coût de calcul.
- (+) Faible retard. C'est un très bon outil en communication.
- (-) Non-linéarité en phase.
- (-) Instabilité numérique.

4.2 Fonctions de transfert

Lire Gargour p.129-130 et p.139 (définitions et causalité).

4.3 Réponses fréquentielles

Lire Gargour

- p.161-162 (module, déphasage, retard de groupe),
- p.169-170 (réponse fréq. facteur du premier ordre),
- p.177-178 (réponse fréq. facteur du second ordre) et
- p.180-183 (fonctions de transfert du second ordre).

4.4 Stabilité des filtres numériques

Lire Gargour

- p.140-141 et p.145 (règles de stabilité) et
- p.146-147 (critère et tableau de Jury).

4.5 Représentation par pôles et zéros

Considérons $H(z) = Z[h_n]$.

- Les pôles de $H(z)$ sont les valeurs de z pour lesquelles $H(z)$ tend vers l'infini.
- Les zéros de $H(z)$ sont les valeurs de z pour lesquelles $H(z)$ est nul.
- Les pôles et les zéros complexes de $H(z)$ sont de la forme $\alpha \pm i\beta$.

Si $X(z)$ possède M zéros z_m et N pôles p_n , on peut la mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{X(z)}{Y(z)} \\ &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \\ &= A \frac{\prod_{m=1}^M (z - z_m)}{\prod_{n=1}^N (z - p_n)} \end{aligned}$$

- On peut toujours écrire une TZ sous cette forme, et donc représenter le signal par des listes de pôles et de zéros.
- Exemple :

$$H(z) = Z(a^n u_n) = \frac{z}{z - a}$$

4.6 Structures de réalisation

Lire Gargour

- p.207-208 (structures de réalisation) et
- p.212-215 (structures canoniques).

Il est possible de considérer la fonction de transfert

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}} \quad (14)$$

comme la mise en série de deux systèmes :

$$H(z) = H_1(z)H_2(z). \quad (15)$$

Soit $w(k)$ le signal à la sortie de H_1 . On montre que

$$w(k) = \frac{1}{a_0}x(k) - \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{a_0}w(k-n) \quad (16)$$

Comme $w(k)$ est également le signal d'entrée de H_2 , on a également

$$y(k) = \sum_{m=0}^M b_m w(k-m). \quad (17)$$

En donnant les schéma-bloc de ces deux filtres, on observe que ces deux structures ont un certain nombre d'éléments de retard (z^{-1}) qui peuvent être mis en commun.

La structure canonique d'un filtre est la réalisation qui possède un nombre minimum de retards.

5 Quelques filtres RIF

5.1 Filtres RIF dérivateurs

La dérivée d'une fonction $s(t)$ est définie par

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}. \quad (18)$$

► Pour un signal numérique $s(n)$ la limite n'existe pas. \Rightarrow On ne peut calculer la dérivée d'un signal numérique.

- Mais on peut calculer des différences. Par exemple

$$(n=1) \quad \frac{\Delta s(n)}{\Delta n} = s(n) - s(n-1) \quad (19)$$

$$(n=2) \quad \frac{\Delta s(n)}{\Delta n} = \frac{s(n) - s(n-2)}{2} \quad (20)$$

- Ces deux différences correspondent à des filtres :

$$s(n) - s(n-1) \rightsquigarrow s * h_n \text{ avec } h = (-1, 1) \quad (21)$$

$$s(n) - s(n-2) \rightsquigarrow s * h_n \text{ avec } h = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) \quad (22)$$

- Comment se comportent ces filtres ?

- En calculant leur fonctions de transfert $H(w)$.

- Montrons que

$$H_1(\omega) = |2 \sin(\omega/2)| \quad (23)$$

$$\text{et } H_2(\omega) = |\sin(\omega)|. \quad (24)$$

- On rappelle (cf Ma3) que l'opération de dérivation se traduit dans le domaine fréquentiel par une multiplication par $-i\omega$. La fonction de transfert est donc :

$$D(\omega) = |w|. \quad (25)$$

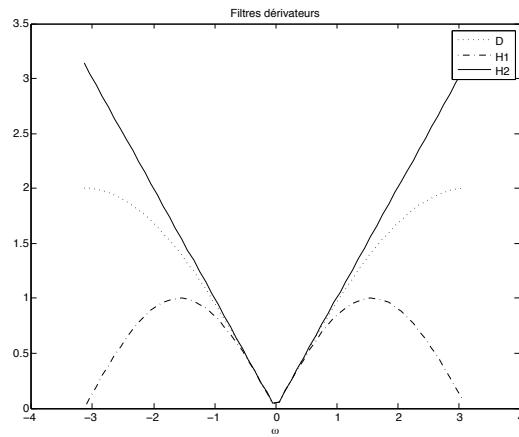


FIGURE 10 – Comparaison des dérivations

- La dérivation "amplifie" les hautes-fréquences. ► La numérisation "embrouille" les hautes-fréquences.

5.2 Filtres de lissage

Nous allons nous intéresser aux filtres binomiaux, dont les coefficients sont ceux du polynôme :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (26)$$

$$\text{avec } \binom{n}{k} C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (27)$$

- les coefficients $\binom{n}{k}$ sont obtenus rapidement par le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \end{array}$$

- Ces coefficients définissent des filtres aux propriétés remarquables.

$$b_1 = (1; 1) \quad (28)$$

$$b_2 = (1; 2; 1) \quad (29)$$

$$b_3 = (1; 3; 3; 1) \quad (30)$$

$$\dots = \dots$$

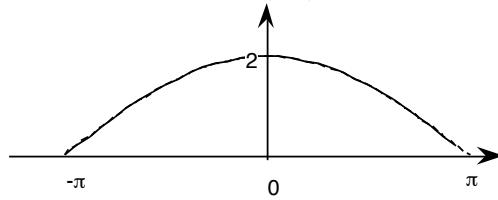
- Ils produisent une réponse analogue à celle du filtre Gaussien, discrète et finie. (mais ce n'est pas une gaussienne).

- Leur fonction de transfert peut être rapidement obtenue

- Étude du filtre $b_1 = (1; 1)$.

Montrons que

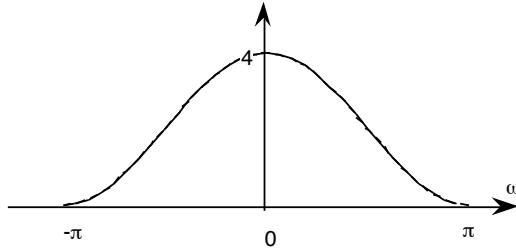
$$|B_1(\omega)| = 2 \cos(\omega/2). \quad (31)$$



- Étude du filtre $b_2 = (1; 2; 1)$.

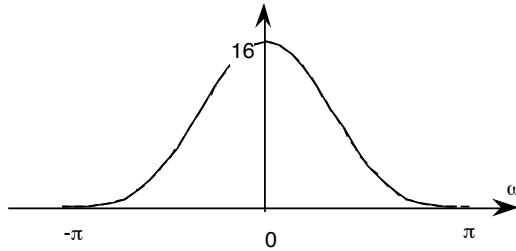
Montrons que

$$|B_2(\omega)| = \left[2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^2. \quad (32)$$



- On montre de la même façon que

$$|B_4(\omega)| = \left[2 \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \right]^4. \quad (33)$$



- Ces filtres réduisent les hautes-fréquences. Ils correspondent à une opération de lissage.
- Il convient de les normaliser, pour obtenir un gain unitaire.

5.3 Lissage et dérivation

- Il est aisé de vérifier que

$$b_2 = b_1 * b_1 \quad (34)$$

$$b_3 = b_1 * b_1 * b_1 = b_2 * b_1 \quad (35)$$

$$\dots = \dots \quad (36)$$

$$b_n = b_{n-1} * b_1. \quad (37)$$

- De même que

$$h_2 = h_1 * b_1. \quad (38)$$

Ce qui permet de mieux comprendre la fonction de transfert $H_2(\omega)$.

6 Synthèse de filtres numériques

6.1 Rappels sur les filtres analogiques

Lire Gargour

- p.241-244 (introduction et passe-bas de Butterworth),
- p.248-251 (passe-bas de Tchebycheff),
- p.255-257 (transformation de passe-bas),
- p.264-266 (méthode de la réponse impulsionnelle),
- p.273-278 (méthode de la transformation bilinéaire) et
- p.304-305 (transformation de passe-bas de la domaine z).

Passe-bas de Butterworth

Le module de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert $T(s)$ du PB de Butterworth d'ordre n et de pulsation de coupure Ω_c est

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}} \quad (39)$$

Passe-bas de Butterworth

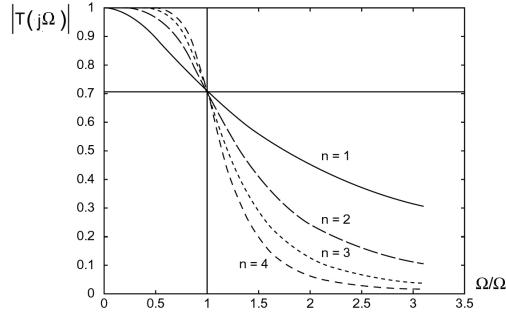


FIGURE 11 – Module de quelques fonctions de transfert passe-bas Butterworth

Passe-bas de Butterworth

n	Tableau T7.2.1 Fonctions de transfert passe-bas de Butterworth normalisées. Pulsation de coupure: 1 rad/s.
1	$\frac{1}{S+1}$
2	$\frac{1}{S^2 + 1.4142S + 1}$
3	$\frac{1}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1}$
4	$\frac{1}{S^4 + 2.6131S^3 + 3.4142S^2 + 2.6131S + 1}$
5	$\frac{1}{S^5 + 3.2361S^4 + 5.2361S^3 + 5.2361S^2 + 3.2361S + 1}$
6	$\frac{1}{S^6 + 3.8637S^5 + 7.4641S^4 + 9.1416S^3 + 7.4641S^2 + 3.8637S + 1}$

Passe-bas de Tchebycheff

Le module de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert $T_C(s)$ du PB de Tchebycheff d'ordre n et de pulsation de coupure Ω_c est

$$|T_C(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2 \left(\frac{\omega}{\Omega_p}\right)}} \quad (40)$$

$\epsilon \in [0, 1]$ est le coefficient d'ondulation, C_n la fonction de Tchebycheff (oscillante) et Ω_p la pulsation de fin de bande d'ondulation.

Passe-bas de Tchebycheff

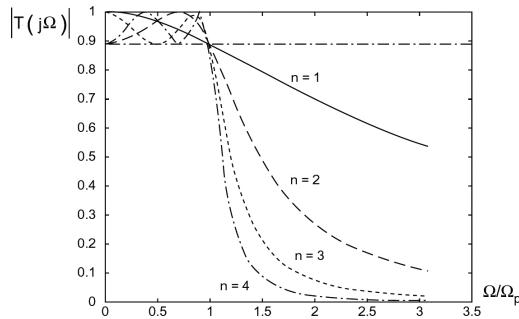


FIGURE 12 – Module de quelques fonctions de transfert passe-bas Tchebycheff

Passe-bas de Tchebycheff

n	Tableau T7.2.2 Fonctions de transfert passe-bas de Tchebycheff normalisées. Bande d'ondulation: $0 \leq \Omega \leq 1$ rad/s. Ondulation de 1 dB ($\epsilon = 0.5088$).
1	$\frac{1.9652}{S + 1.9652}$
2	$\frac{0.9826}{S^2 + 1.0977S + 1.1025}$
3	$\frac{0.4913}{S^3 + 0.9883S^2 + 1.2384S + 0.4913}$
4	$\frac{0.2456}{S^4 + 0.9528S^3 + 1.4539S^2 + 0.7426S + 0.2756}$
5	$\frac{0.1228}{S^5 + 0.9368S^4 + 1.6888S^3 + 0.9744S^2 + 0.5805S + 0.1228}$
6	$\frac{0.06141}{S^6 + 0.92825S^5 + 1.9308S^4 + 1.2021S^3 + 0.9393S^2 + 0.3071S + 0.068907}$

6.2 Filtre RII

Méthode de la rép. imp. invariante

Considérons la fonction de transfert du premier ordre

$$t(s) = \frac{1}{s - p}, p = \omega_p + j\omega_p \quad (41)$$

En calculant sa réponse impulsionnelle et en posant $t = nT_s$, on obtient

$$h(n) = T_s e^{pnT_s} u(n) \quad (42)$$

dont la TZ est

$$H(z) = \frac{T_s}{1 - e^{pT_s} z^{-1}}. \quad (43)$$

- La réponse $H(z)$ est une approximation de celle de $t(s)$
- Si $t(s)$ est stable ($\sigma_p < 0$), $H(z)$ l'est également ($|e^{pT_s}| < 1$).

Généralisation

Pour une fonction de transfert $t(s)$ quelconque :

- Obtenir une décomposition de $t(s)$ en éléments simples du premier ordre
- Effectuer la transformation suivante pour chacune des fractions :

$$\frac{1}{s - p} \rightarrow \frac{T_s}{1 - e^{pT_s} z^{-1}} \quad (44)$$

(plus compliqué si la décomposition fait apparaître des éléments simple du second ordre)

- Exemple : Avec $T_s = 0,05\text{s}$, obtenir une fonction de transfert causale $H(z)$ à partir de

$$t(s) = \frac{1}{(s+5)(s+12)}. \quad (45)$$

Méthode de la transformation Bilinéaire

En comparant transformée de Laplace et TZ :

$$X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-st}dt, \quad (46)$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)z^{-n} \quad (47)$$

(et si $x(t)$ vérifie certaines conditions), le passage du domaine S au domaine Z peut se faire par

$$z = e^{sT_s} \leftrightarrow s = \frac{1}{T_s} \ln(z). \quad (48)$$

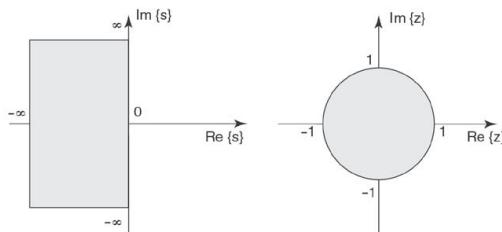
Cette dernière relation ($s = \frac{1}{T_s} \ln(z)$) peut s'écrire comme un développement en série :

$$s = \frac{2}{T_s} \left[\left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots \right] \quad (49)$$

dont on ne conserve que le premier terme

$$s = \lambda \left(\frac{z-1}{z+1} \right), \lambda = \frac{2}{T_s}. \quad (50)$$

Géométriquement, on fait correspondre le demi-plan complexe gauche avec le disque unité :



6.3 Transformations de fonctions de transfert

Il est possible d'utiliser les relations suivantes pour transformer

- une fonction de transfert du type passe-bas RII
- en une fonction de transfert du type passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande dont la ou les pulsations de coupure sont spécifiées.

Par exemple :

TLL. Transformation passe-bas à passe-bas

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \rho_1}{1 - \rho_1 z^{-1}}, \rho_1 = \frac{\sin\left(\frac{\omega_{lp1} - \omega_{lp2}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_{lp1} + \omega_{lp2}}{2}\right)} \quad (7.7.1)$$

ω_{lp1} : Pulsation de coupure de la fonction de transfert passe-bas originale.

ω_{lp2} : Pulsation de coupure de la fonction de transfert passe-bas requise.

6.4 Filtre RIF

- Il existe principalement trois méthodes :

Fenétrage : on applique une fenêtre de taille N au filtre idéal.

Échantillonnage fréquentiel : on utilise la transformée de Fourier discrète inverse depuis une fonction discrète représentative du filtre et définie en fréquence.

Optimisation : on cherche à minimiser un critère d'erreur entre la courbe du filtre et le filtre idéal.

- Filtre RIF par échantillonnage fréquentiel :

1. On spécifie les caractéristiques souhaitées en fréquence $H_s(\omega)$ pour l'intervalle $-\pi < \omega < \pi$. ($H_s(\omega)$ est 2- π périodique après échantillonnage).
2. Les coefficients du filtre sont donnés par transformée de Fourier inverse :

$$h_s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_s(\omega) e^{in\omega} d\omega. \quad (51)$$

3. On tronque la réponse impulsionnelle du filtre

$$h(n) = h_s(n)w_N(n). \quad (52)$$

4. On contrôle que l'erreur $H_s(\omega) - H(\omega)$ est acceptable

$$H(\omega) = H_s(\omega) * W_N(\omega). \quad (53)$$

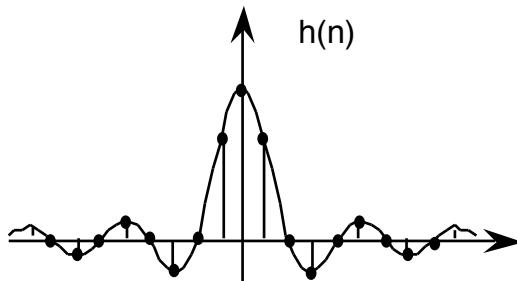
Passe-bas idéal

- Spécification :

$$H_s(\omega) = \begin{cases} 1 & -\omega_c < \omega < \omega_c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (54)$$

- Montrons que

$$h_s(n) = \frac{\sin(n\omega_c)}{n\pi}. \quad (55)$$



Passe-bas idéal

- On ne conserve que N échantillons (on traite le cas $\omega = \pi/2$:

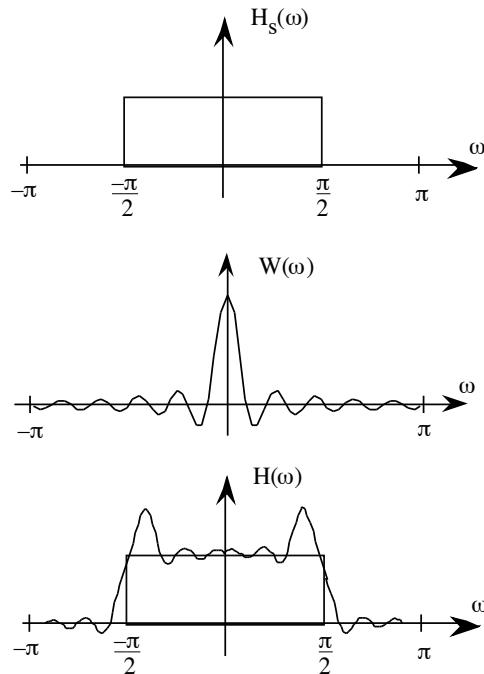
$$h(n) = \frac{1}{2} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} w_N(n) \quad (56)$$

$$\text{avec } w_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n < N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (57)$$

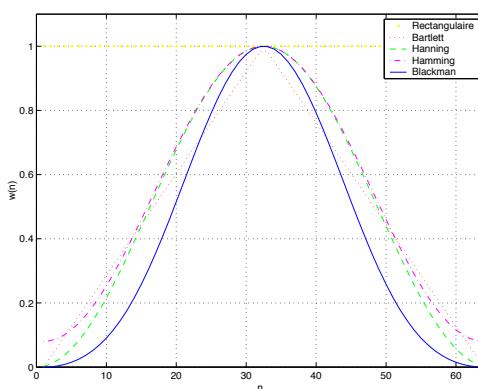
- On montre que la fonction de transfert est

$$H(\omega) = H_s(\omega) * \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-i\omega(N-1)/4}. \quad (58)$$

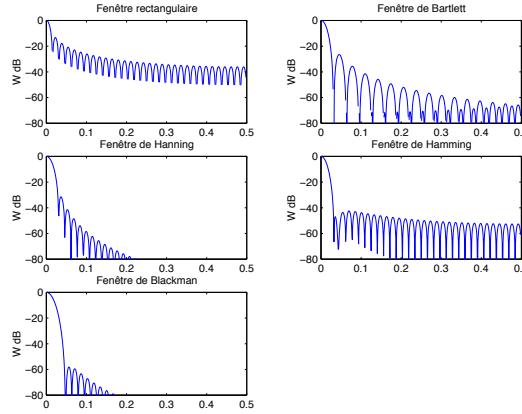
Passe-bas idéal



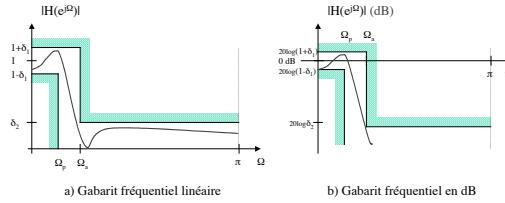
- Troncature temporelle \Rightarrow ondulations en fréquence.
- Pour éviter ces ondulations, on utilise des fenêtres plus douces :



- En fréquence :



- Pour éviter ces ondulations, on spécifie le filtre à l'aide d'un gabarit.



- On spécifie trois zones : bande passante, bande de transition et bande atténuee.
- Et on recherche les coefficients d'une structure connue (Chebyshev, Butterworth, McClellan par exemple) qui satisfont ces contraintes.

6.5 Conclusion

- Il est possible d'utiliser les *toolboxes* de Matlab pour effectuer les calculs (analyse et synthèse d'un filtre).
- Ce qui n'a pas été détaillé (principalement) :
 - l'exploitation de la position des pôles et des zéros dans la caractérisation des filtres RII,
 - fonctions de transfert usuelles (peigne, à déphasage minimal ou linéaire),
 - structures (cascades, parallèles, mixte, en treillis),
 - ...
- La littérature est vaste sur ce sujet et la recherche active.

4 Fonctions de transfert et stabilité

4.1 Introduction

La transformée en Z a fait l'objet d'une étude générale au chapitre précédent. Nous étudierons ici plus particulièrement la transformée en Z de la réponse impulsionnelle d'un système linéaire invariant dans le temps (SLIT). C'est la fonction de transfert de ce système. Nous présenterons aussi une méthode permettant de déterminer si un SLIT est stable, à partir des propriétés de sa fonction de transfert.

4.2 Fonction de transfert d'un SLIT

Tout système linéaire invariant dans le temps (SLIT) peut être exprimé sous la forme d'une équation aux différences (EAD) ayant la forme générale suivante:

$$y(n) = \sum_{k=M_1}^{M_2} \beta_k x(n-k) + \sum_{\substack{k=N_1 \\ k \neq 0}}^{N_2} \alpha_k y(n-k) \quad (4.2.1)$$

où $x(n)$ est le signal d'entrée du système et $y(n)$ son signal de sortie.

Si nous appliquons la transformée en Z aux deux membres de l'équation 4.2.1, nous obtenons alors :

$$Y(z) = \sum_{k=M_1}^{M_2} \beta_k z^{-k} X(z) + \sum_{\substack{k=N_1 \\ k \neq 0}}^{N_2} \alpha_k z^{-k} Y(z) \quad (4.2.2)$$

ou :

$$Y(z) \left[1 - \sum_{\substack{k=N_1 \\ k \neq 0}}^{N_2} \alpha_k z^{-k} \right] = X(z) \sum_{k=M_1}^{M_2} \beta_k z^{-k} \quad (4.2.3)$$

Le rapport $H(z)$ entre $Y(z)$, qui est la transformée en Z du signal de sortie $y(n)$, et $X(z)$, qui est celle du signal d'entrée $x(n)$, est donné par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=M_1}^{M_2} \beta_k z^{-k}}{1 - \sum_{\substack{k=N_1 \\ k \neq 0}}^{N_2} \alpha_k z^{-k}} \quad (4.2.4)$$

$H(z)$ est la **fonction de transfert** du SLIT. Il est possible d'obtenir la fonction de transfert d'un SLIT à partir de l'équation aux différences qui le caractérise et vice-versa.

$H(z)$ est aussi la transformée en Z de la réponse impulsionnelle $h(n)$ du SLIT. Ceci découle du fait que la TZ d'un signal d'entrée consistant en une impulsion $x(n) = \delta(n)$ est $X(z) = 1$. De plus, on remarquera que puisque le signal de sortie de tout SLIT peut être obtenu en effectuant le produit de convolution de son signal d'entrée $x(n)$ par sa réponse impulsionnelle $h(n)$, on a :

$$y(n) = h(n)*x(n) \Leftrightarrow Y(z) = H(z) X(z) \Leftrightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (4.2.5)$$

Les racines du numérateur et du dénominateur d'une fonction de transfert telle que $H(z)$ sont respectivement désignées comme étant les **zéros** et les **pôles** de cette dernière.

4.3 Causalité d'un SLIT

La transformée en Z de la réponse impulsionnelle d'un SLIT causal ne peut comporter aucune puissance positive de z. Donc, dans le cas où la fonction de transfert rationnelle $H(z)$ d'un SLIT est telle que $\lim_{z \rightarrow \infty} \{H(z)\} \rightarrow \infty$, c'est-à-dire si l'ordre du numérateur de $H(z)$ est supérieur à celui de son dénominateur, le SLIT en question ne peut pas être causal. Dans le cas contraire, il peut l'être, mais ne l'est, comme nous l'avons déjà mentionné, que si sa RDC s'étend du pôle de $H(z)$ le plus éloigné de l'origine jusqu'à l'infini. On notera que si $\lim_{z \rightarrow \infty} \{H(z)\} \rightarrow \infty$, la fonction de transfert possède un pôle à $z \rightarrow \infty$ et par conséquent sa RDC ne peut pas remplir cette condition.

4.4 Stabilité d'une fonction de transfert d'un SLIT

La région de convergence (RDC) de la fonction de transfert $H(z)$ d'un SLIT est définie par:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)z^{-n}| = C < \infty \quad (4.4.1)$$

Un SLIT, dont la réponse impulsionnelle est $h(n)$ et la fonction de transfert est $H(z)$, est stable s'il remplit la condition suivante:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = C < \infty \quad (4.4.2)$$

Il découle de la comparaison des équations 4.4.1 et 4.4.2 qu'un SLIT est stable si le cercle unité $|z| = 1$ est inscrit dans la RDC de sa fonction de transfert.

On peut donc dire en résumé qu'un SLIT dont la fonction de transfert rationnelle est:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (4.4.3)$$

est stable si et seulement si sa région de convergence contient le cercle unité $|z| = 1$.

De cette condition générale, on peut déduire les deux règles suivantes:

- a. La fonction de transfert rationnelle $H(z)$ d'un SLIT causal est stable si et seulement si tous ses pôles sont à l'intérieur du cercle unité $|z| = 1$, comme illustré par la figure 4.4.1a.
- b. La fonction de transfert rationnelle $H(z)$ d'un SLIT anticausal est stable si et seulement si tous ses pôles sont à l'extérieur du cercle unité $|z| = 1$, comme illustré à la figure 4.4.1b.

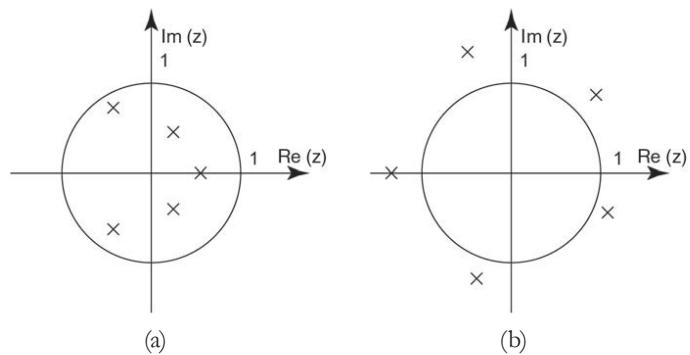


Figure 4.4.1 (a) Pôles situés à l'intérieur de $|z| = 1$
(b) Pôles situés à l'extérieur de $|z| = 1$

4.4.1 Racines complexes d'un polynôme du second ordre

Les deux racines complexes $r_{1,2}$, de tout polynôme $P(z)$ du second ordre à coefficients réels sont des conjuguées complexes l'une de l'autre. De telles racines $r_{1,2} = r[\cos(\theta) \pm j\sin(\theta)]$ sont représentées à la figure 4.4.2. Le polynôme $P(z)$ peut être exprimé en fonction de ses racines comme suit:

$$\begin{aligned} P(z) &= [z - r\cos(\theta) - jr\sin(\theta)][z - r\cos(\theta) + jr\sin(\theta)] \\ &= z^2 - 2rz\cos(\theta) + r^2 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

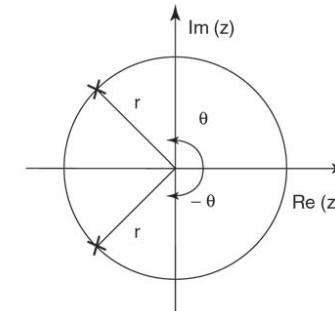


Figure 4.4.2 Racines complexes d'un polynôme du second ordre à coefficients réels

où r est un nombre positif puisqu'il représente le module de chacune des racines de $P(z)$, tandis que θ et $-\theta$ sont respectivement les angles de ces racines.

Nous constatons que les deux racines de $P(z)$ se trouvent à l'intérieur du cercle unité si et seulement si $|r| < 1$. Elles sont situées à l'extérieur du cercle unité si et seulement si $|r| > 1$. Aucune restriction ne s'applique à l'angle θ .

4.4.2 Critère et tableau de Jury

Il est possible de déterminer si toutes les racines du polynôme:

$$D(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_1 z + a_0, a_N > 0 \quad (4.4.5)$$

sont à l'intérieur du cercle unité $|z| = 1$ ou non, à l'aide du critère de Jury qui requiert l'élaboration du tableau du même nom.

Avant d'entamer l'élaboration du tableau de Jury, il est toutefois nécessaire de s'assurer que chacune des trois conditions suivantes est remplie:

$$a_N > |a_0| \quad (4.4.6a)$$

$$D(1) > 0 \quad (4.4.6b)$$

$$(-1)^N D(-1) > 0 \quad (4.4.6c)$$

Ces conditions sont nécessaires, mais non suffisantes, pour que toutes les racines de $D(z)$ soient à l'intérieur du cercle unité. Si l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas remplie, les racines de $D(z)$ ne sont pas toutes à l'intérieur du cercle unité. De ce fait, point n'est alors besoin de poursuivre le test. Si toutes les conditions préliminaires sont remplies, il faut alors dresser le tableau de Jury que l'on détaillera plus loin et s'assurer que toutes les conditions relatives à ce tableau, données par l'équation 4.4.7, sont elles aussi remplies.

$$|b_{N-1}| > |b_0|, |c_{N-2}| > |c_0|, |d_{N-2}| > |d_0|, \dots, |r_2| > |r_0| \quad (4.4.7)$$

L'élaboration du tableau de Jury, qui comporte $2N - 3$ lignes, peut être effectuée comme suit:

Tableau de Jury							
1 2	a_N a_0	a_{N-1} a_1	a_{N-2} a_2	...	a_2 a_{N-2}	a_1 a_{N-1}	a_0 a_N
3 4	b_{N-1} b_0	b_{N-2} b_1	b_{N-3} b_2	...	b_1	b_0 b_{N-2}	b_{N-1}
5 6	c_{N-2} c_0	c_{N-3} c_1	c_{N-4} c_2	...	c_0 c_{N-2}		
.	
.	
.	
$2N - 3$	r_2	r_1	r_0				

où:

$$b_i = \begin{vmatrix} a_N & a_{N-1-i} \\ a_0 & a_{i+1} \end{vmatrix}, i = 0, 1, 2, \dots, N-1, c_i = \begin{vmatrix} b_{N-1} & b_{N-2-i} \\ b_0 & b_{i+1} \end{vmatrix}, i = 0, 1, 2, \dots, N-2, \text{ etc.}$$

On remarquera que la dernière ligne du tableau de Jury contient toujours trois éléments.

Si toutes les conditions préliminaires données par les équations 4.4.6 sont remplies et que toutes les conditions relatives au tableau de Jury données par les équations 4.4.7 le sont également, on peut alors dire que toutes les racines de $D(z)$ sont à l'intérieur du cercle unité $|z| = 1$.

L'ensemble des conditions préliminaires données par les équations 4.4.6 et des conditions relatives au tableau de Jury données par les équations 4.4.7 constitue ce que l'on nomme le critère de Jury.

5 Réponses fréquentielles

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, notre attention se portera sur les réponses fréquentielles des systèmes linéaires invariants dans le temps (SLIT). Puisque le numérateur et le dénominateur de toute fonction de transfert rationnelle peuvent tous deux être décomposés en facteurs du premier ordre à racines réelles et en facteurs du second ordre à racines complexes, nous nous pencherons plus particulièrement sur le calcul des modules, déphasages et délais de propagation de groupe de ces facteurs. Nous considérerons par la suite en détail quelques classes importantes de réponses fréquentielles et les fonctions de transfert dont elles découlent. Ainsi, nous étudierons les fonctions de transfert de type passe-tout, celles de type peigne et les fonctions de transfert RIF à déphasage linéaire.

5.2 Réponse fréquentielle d'un SLIT

La réponse fréquentielle d'un SLIT présente en général une grande importance, et ce, plus particulièrement dans le cas où le système considéré est un filtre. Nous étudierons donc ici le calcul des modules, déphasages et temps de propagation de groupe (retards de groupe) des réponses fréquentielles des SLIT à partir de leurs fonctions de transfert.

5.2.1 Forme générale de la réponse fréquentielle d'un SLIT

La réponse fréquentielle d'un SLIT stable peut être obtenue en posant, comme nous l'avons indiqué à la section 3.6, $z = e^{j\omega}$, dans sa fonction de transfert $H(z)$. Ainsi, la réponse fréquentielle $H(e^{j\omega})$ du SLIT est donnée par:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)} = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega}) \quad (5.2.1)$$

où $|H(e^{j\omega})|$, $\phi(e^{j\omega})$, $H_R(e^{j\omega})$ et $H_I(e^{j\omega})$ sont respectivement le module, le déphasage, la partie réelle et la partie imaginaire de $H(e^{j\omega})$. De plus, $\omega = \Omega T_s = (2\pi F)T_s = 2\pi F/F_s$, où F est la fréquence et $T_s=1/F_s$ est la période d'échantillonnage. Toutes ces quantités ont déjà été définies au chapitre 1. Les relations suivantes découlent directement de l'équation 5.2.1:

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{H_R^2(e^{j\omega}) + H_I^2(e^{j\omega})} \quad (5.2.2)$$

$$\tan[\phi(e^{j\omega})] = \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} \quad (5.2.3a)$$

Après simplification des facteurs communs à $H_I(e^{j\omega})$ et $H_R(e^{j\omega})$, cette dernière relation peut généralement être réécrite comme suit pour les valeurs de ω différentes de celles qui annulent simultanément $Q_I(e^{j\omega})$ et $Q_R(e^{j\omega})$:

$$\tan[\phi(e^{j\omega})] = \frac{Q_I(e^{j\omega})}{Q_R(e^{j\omega})} \quad (5.2.3b)$$

d'où:

$$\phi(e^{j\omega}) = \arctan\left[\frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})}\right] = \arctan\left[\frac{Q_I(e^{j\omega})}{Q_R(e^{j\omega})}\right] \quad (5.2.4)$$

Le temps de propagation de groupe (retard de groupe) $\tau(e^{j\omega})$ est défini par:

$$\tau(e^{j\omega}) = -T_s \left(\frac{d\phi(e^{j\omega})}{d\omega} \right) \quad (5.2.5)$$

et l'on peut démontrer que ce dernier peut être exprimé sous la forme suivante:

$$\tau(e^{j\omega}) = -T_s \left[\frac{Q_R(e^{j\omega})Q'_I(e^{j\omega}) - Q'_R(e^{j\omega})Q_I(e^{j\omega})}{Q_R^2(e^{j\omega}) + Q_I^2(e^{j\omega})} \right] \quad (5.2.6a)$$

où:

$$Q'_R(e^{j\omega}) = \frac{dQ_R(e^{j\omega})}{d\omega}, Q'_I(e^{j\omega}) = \frac{dQ_I(e^{j\omega})}{d\omega} \quad (5.2.6b)$$

Les exemples suivants illustrent l'utilisation de ces formules.

5.3 Réponses fréquentielles des facteurs du premier et du second ordre

Dans cette section, nous étudierons pour commencer les réponses fréquentielles des facteurs du premier ordre. Il est toujours possible de décomposer un facteur du second ordre en un produit de deux facteurs du premier ordre. Toutefois, il est souvent plus avantageux de disposer de formules donnant directement le module, le déphasage et le retard de groupe de la réponse fréquentielle des facteurs du second ordre à coefficients réels et à racines complexes. Nous étudierons donc aussi, par la suite, la réponse fréquentielle de ces facteurs.

5.3.1 Réponse fréquentielle d'un facteur du premier ordre

Comme nous l'avons démontré à la section 5.2.2, le numérateur aussi bien que le dénominateur de toute fonction rationnelle $H(z)$ peuvent être exprimés sous la forme d'un produit de facteurs du premier ordre dont la forme générale est :

$$F(z) = z - re^{j\theta} \quad (5.3.1)$$

où r et θ sont deux quantités réelles. La quantité $re^{j\theta}$ peut être un zéro ou un pôle de $H(z)$ selon que $F(z)$ est un facteur du numérateur ou du dénominateur de la fonction de transfert. Il est évident que r est le module du zéro ou du pôle en question, tandis que θ est son argument exprimé en radians. En règle générale, la quantité r est positive puisqu'elle représente un module. Toutefois, le fait de lui attribuer une valeur négative revient à ajouter un déphasage de π rad à l'angle θ .

La réponse fréquentielle du facteur $F(z)$ est $F(e^{j\omega})$, où :

$$\begin{aligned} F(e^{j\omega}) &= e^{j\omega} - re^{j\theta} = [\cos(\omega) - r \cos(\theta)] + j[\sin(\omega) - r \sin(\theta)] \\ &= F_R(e^{j\omega}) + jF_I(e^{j\omega}) \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Le module $|F(e^{j\omega})|$ de cette réponse fréquentielle peut prendre la forme suivante :

$$|F(e^{j\omega})| = \sqrt{[\cos(\omega) - r \cos(\theta)]^2 + [\sin(\omega) - r \sin(\theta)]^2} \quad (5.3.3)$$

d'où :

$$|F(e^{j\omega})| = \sqrt{1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2} \quad (5.3.4)$$

L'argument $\phi_F(e^{j\omega})$ de $F(e^{j\omega})$ est donné par :

$$\tan[\phi_F(e^{j\omega})] = \frac{F_I(e^{j\omega})}{F_R(e^{j\omega})} = \frac{Q_I(e^{j\omega})}{Q_R(e^{j\omega})} = \frac{\sin(\omega) - r \sin(\theta)}{\cos(\omega) - r \cos(\theta)} \quad (5.3.5)$$

De la sorte, nous obtenons :

$$\phi_F(e^{j\omega}) = \arctan \left\{ \frac{\sin(\omega) - r \sin(\theta)}{\cos(\omega) - r \cos(\theta)} \right\} \quad (5.3.6)$$

Le retard de groupe $\tau(e^{j\omega})$ de $F(e^{j\omega})$ peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} \tau_F(e^{j\omega}) &= -T_s \frac{d\phi_F(e^{j\omega})}{d\omega} \\ &= -T_s \left(\frac{Q_R(e^{j\omega})Q'_I(e^{j\omega}) - Q'_R(e^{j\omega})Q_I(e^{j\omega})}{Q_R^2(e^{j\omega}) + Q_I^2(e^{j\omega})} \right) \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

donc :

$$\tau_F(e^{j\omega}) = -T_s \left(\frac{1 - r \cos(\omega - \theta)}{1 - 2r \cos(\omega - \theta) + r^2} \right) = -T_s \left(\frac{1 - r \cos(\omega - \theta)}{|F(e^{j\omega})|^2} \right) \quad (5.3.8)$$

Les exemples suivants ont pour but d'illustrer la méthode de calcul de la réponse fréquentielle décrite ici.

Le déphasage de $G(e^{j\omega})$ est:

$$\phi_G(e^{j\omega}) = \arctan \left\{ \frac{Q_I(e^{j\omega})}{Q_R(e^{j\omega})} \right\} = \arctan \left\{ \frac{\sin(2\omega) - 2r \cos(\theta) \sin(\omega)}{\cos(2\omega) - 2r \cos(\theta) \cos(\omega) + r^2} \right\} \quad (5.3.13)$$

Le retard de groupe $\tau_G(e^{j\omega})$, de $G(e^{j\omega})$ peut être obtenu à l'aide de l'équation 5.2.6 en utilisant:

$$Q_R(e^{j\omega}) = \cos(2\omega) - 2r \cos(\theta) \cos(\omega) + r^2 \quad (5.3.14a)$$

$$Q_R'(e^{j\omega}) = -2[\sin(2\omega) - r \cos(\theta) \sin(\omega)] \quad (5.3.14b)$$

$$Q_I(e^{j\omega}) = \sin(2\omega) - 2r \cos(\theta) \sin(\omega) \quad (5.3.14c)$$

$$Q_I'(e^{j\omega}) = 2[\cos(2\omega) - r \cos(\theta) \cos(\omega)] \quad (5.3.14d)$$

5.3.2 Réponse fréquentielle d'un facteur du second ordre

Tout facteur de second ordre à coefficients réels et à racines complexes peut être écrit sous la forme suivante:

$$G(z) = z^2 - [2r \cos(\theta)] z + r^2 \quad (5.3.9)$$

Les deux racines de $G(z)$ sont des conjuguées complexes l'une de l'autre et se trouvent toutes deux à une distance r de l'origine. Les angles respectifs de ces racines sont $\pm \theta$. La réponse fréquentielle de $G(z)$ est donnée par:

$$G(e^{j\omega}) = e^{2j\omega} - [2r \cos(\theta)] e^{j\omega} + r^2 \quad (5.3.10)$$

ce qui peut se réécrire sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} G(e^{j\omega}) &= G_R(e^{j\omega}) + jG_I(e^{j\omega}) \\ &= [\cos(2\omega) - 2r \cos(\theta) \cos(\omega) + r^2] + \\ &\quad j[\sin(2\omega) - 2r \cos(\theta) \sin(\omega)] \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Le module de la réponse fréquentielle de cette fonction de transfert est donné par:

$$\begin{aligned} |G(e^{j\omega})| &= \sqrt{[\cos(2\omega) - 2r \cos(\theta) \cos(\omega) + r^2]^2} \\ &\quad + [\sin(2\omega) - 2r \cos(\theta) \sin(\omega)]^2 \\ &= 2\sqrt{A \cos^2(\omega) + B \cos(\omega) + C} \\ A &= r^2, B = -r(1+r^2) \cos(\theta), C = \left(\frac{1-r^2}{2}\right)^2 + r^2 \cos^2(\theta) \quad (5.3.12) \end{aligned}$$

5.4 Fonctions de transfert du second ordre

Nous considérerons ici les réponses fréquentielles de certaines fonctions de transfert causales et stables du second ordre à pôles complexes dont la forme générale est la suivante :

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (5.4.1a)$$

$$D(z) = (z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta}) = z^2 - [2r \cos(\theta)]z + r^2 \quad (5.4.1b)$$

Les racines de $D(z)$ sont les pôles de $H(z)$. Le polynôme $D(z)$ étant un polynôme du second ordre à coefficients réels, il possède deux racines qui sont des conjuguées complexes l'une de l'autre. De plus, $H(z)$ étant une fonction de transfert causale et stable, ses deux pôles sont inscrits dans le cercle unité $|z| = 1$ du plan complexe Z . Ces pôles sont représentés à la figure 5.4.1.

Nous mentionnerons ici cinq catégories importantes (H_1 à H_5) de fonctions de transfert du second ordre caractérisées par leurs réponses fréquentielles respectives. Ce sont les fonctions de transfert de type passe-bas, passe-haut, passe-bande, coupe-bande et passe-tout. Le choix du numérateur de la fonction de transfert du second ordre détermine la catégorie à laquelle appartient le module de sa réponse fréquentielle.

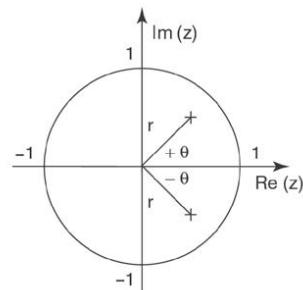


Figure 5.4.1 Pôles complexes d'une fonction de transfert causale, stable, du second ordre, à coefficients réels $H(z) = N(z)/(z^2 - 2rz \cos(\theta) + r^2)$

Les fonctions de transfert causales et stables en question sont les suivantes :

$$H_1(z) = \frac{(1+z)^2}{D(z)}, \text{ Passe-bas} \quad (5.4.2)$$

$$H_2(z) = \frac{(1-z)^2}{D(z)}, \text{ Passe-haut} \quad (5.4.3)$$

$$H_3(z) = \frac{1-z^2}{D(z)}, \text{ Passe-bande} \quad (5.4.4)$$

$$H_4(z) = \frac{z^2 + \epsilon z + 1}{D(z)}, |\epsilon| < 2, \text{ Coupe-bande} \quad (5.4.5)$$

$\epsilon = -2 \cos(\omega_z)$, ω_z est la pulsation de rejet.

$$H_5(z) = \frac{r^2 z^2 - 2z r \cos(\theta) + 1}{D(z)}, \text{ Passe-tout} \quad (5.4.6)$$

$D(z)$ est un dénominateur du second ordre, dont les racines complexes sont à l'intérieur du cercle unité $|z| = 1$. Il est donné par :

$$D(z) = z^2 - 2rz \cos(\theta) + r^2, |r| < 1 \quad (5.4.7)$$

À titre d'exemple, les figures 5.4.2a à 5.4.2e représentent les modules des réponses fréquentielles des fonctions de transfert suivantes :

$$H(z) = \frac{N_i(z)}{D(z)} = \frac{N_i(z)}{z^2 + 0.5z + 0.25}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

- a. $N_1(z) = (1 + z)^2$ est le numérateur d'une fonction de transfert passe-bas.
- b. $N_2(z) = (1 - z)^2$ est le numérateur d'une fonction de transfert passe-haut.
- c. $N_3(z) = (1 - z^2)$ est le numérateur d'une fonction de transfert passe-bande.
- d. $N_4(z) = (z^2 + 0.7z + 1)$ est le numérateur d'une fonction de transfert coupe-bande dont la pulsation de rejet est $\omega_z = \arccos(-0.35) = 1.928$ rad.
- e. $N_5(z) = (0.25z^2 + 0.5z + 1)$ est le numérateur d'une fonction de transfert passe-tout.

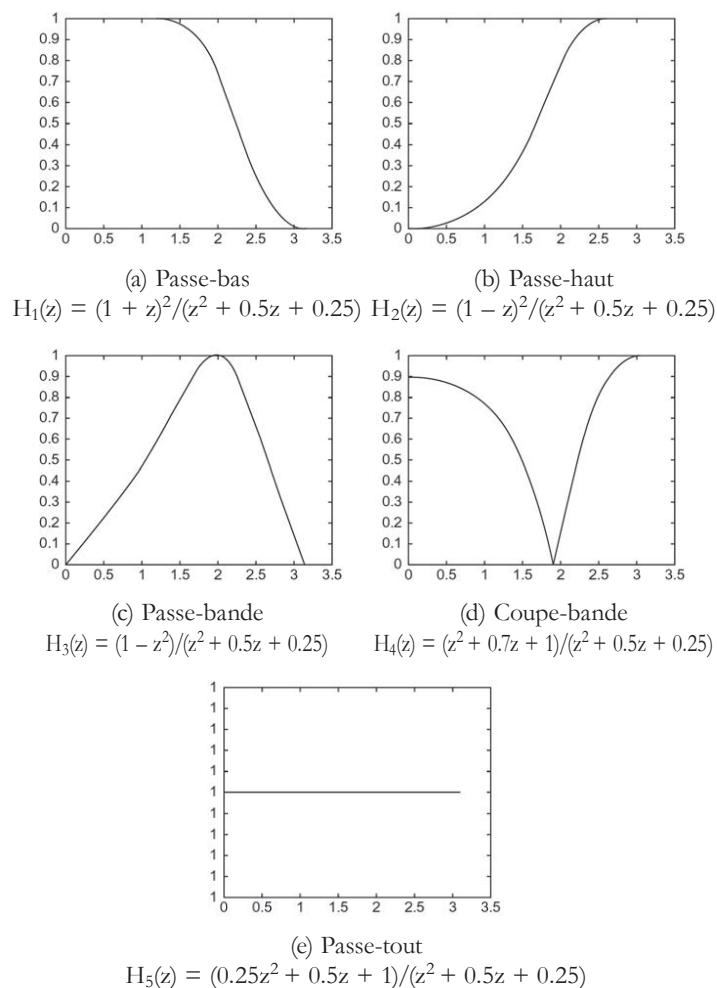


Figure 5.4.2 Modules de différentes fonctions de transfert du deuxième ordre

On peut démontrer que les paramètres r et $\cos(\theta)$ du dénominateur $D(z)$ d'une fonction de transfert passe-bande du second ordre de la forme générale donnée par l'équation 5.4.4, dont le module atteint son maximum à la pulsation ω_0 et dont l'atténuation est A dB aux pulsations ω_1 et ω_2 telles que $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, sont respectivement donnés par :

$$r = \sqrt{\frac{1 - \gamma \tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}{1 + \gamma \tan\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}}, \cos(\theta) = \frac{\cos(\omega_0)}{\sqrt{1 - \gamma^2 \tan^2\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)}}, \quad (5.4.8)$$

$$\gamma = \gamma_B = \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A}{10}} - 1}}$$

Ces expressions de r et de $\cos(\theta)$ sont aussi valables pour une fonction de transfert coupe-bande du second ordre de la forme générale donnée par l'équation 5.4.5, dont l'atténuation du module aux pulsations ω_1 et ω_2 telles que $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_0$, est A dB et dont la pulsation de rejet est $\omega_z = \omega_0$. Toutefois, dans ce cas, le paramètre γ est donné par :

$$\gamma = \gamma_R = \sqrt{10^{\frac{A}{10}} - 1} \quad (5.4.9)$$

Note: Les relations données par les équations 5.4.8 et 5.4.9 ne sont données ici que pour permettre une familiarisation rapide avec le comportement fréquentiel de quelques-unes des fonctions de transfert du second ordre de type passe-bande et coupe-bande. Elles pourront être démontrées à titre d'exercice au chapitre 7 à l'aide des notions qui y seront exposées.

6 Structures de réalisation

6.1 Introduction

Pour obtenir une réalisation d'un SLIT discret à partir de la fonction de transfert qui le caractérise, il faut d'abord générer à l'aide de cette dernière un algorithme ou structure que l'on peut mettre en œuvre à l'aide de la technologie appropriée. Une structure correspond à une séquence de calculs qui sont effectués dans un ordre donné et habituellement à l'intérieur d'une période d'échantillonnage, pour calculer le signal de sortie du SLIT. Une même fonction de transfert peut en général être représentée par plusieurs structures qui sont équivalentes du point de vue purement mathématique. Chacune de ces structures correspond toutefois à un ensemble différent d'équations aux différences (EAD) et elles n'ont donc pas toutes la même complexité. Les signaux à traiter aussi bien que les coefficients de la fonction de transfert d'un SLIT étant représentés dans toute structure par un nombre fini de bits, ceci entraîne une altération de la réponse en fréquence idéale du système. Cette altération dépend du nombre de bits utilisés ainsi que de la structure mise en œuvre. Il s'ensuit que la précision et la rapidité de calcul des différentes structures réalisant un même SLIT à l'aide d'une représentation des valeurs des signaux et des coefficients de la fonction de transfert par un nombre de bits donné sont en général différentes. Il est donc important de choisir celles qui donnent les meilleures performances dans le cas considéré.

6.2 Concepts de base

Un SLIT peut être réalisé, à partir de sa fonction de transfert ou des EAD qui le caractérisent, à l'aide d'additionneurs, de multiplicateurs par une constante et d'éléments à délai. Les symboles de ces éléments sont respectivement représentés par les figures 6.2.1a, 6.2.1b et 6.2.1c. Les éléments à délai représentent chacun un retard d'une période d'échantillonnage. Nous les désignerons donc par le terme délai unité.

On notera que la connexion de tous les éléments requis pour la réalisation d'un système doit être effectuée de telle sorte que la structure en résultant ne contienne pas de boucles sans délai. En effet, aucun algorithme ne permettant le calcul de telles boucles, une structure en contenant ne serait non calculable et donc irréalisable.

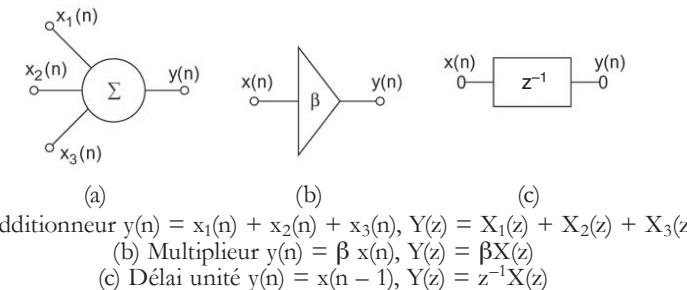


Figure 6.2.1 Éléments de base utilisés pour la réalisation des SLIT discrets

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M \beta_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^N \alpha_n z^{-n}} \quad (6.3.1)$$

6.3 Structures directes

Les structures directes mènent toutes à des réalisations globales des fonctions de transfert considérées. La figure 6.3.1 représente une structure directe de forme I de la fonction de transfert :

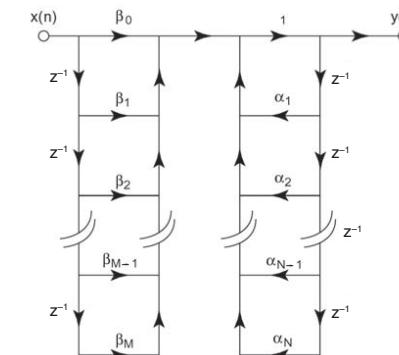


Figure 6.3.1 Structure directe de forme I, $M \leq N$

La figure 6.3.2 représente une structure directe transposée de forme I de cette même fonction de transfert. Elle est obtenue par la transposition du graphe de fluence de la figure 6.3.1. La transposition d'un graphe de fluence consiste à intervertir les rôles du nœud d'entrée et du nœud de sortie et à inverser la direction de chacune des branches du graphe sans en changer la fonction ou la valeur. La fonction de transfert du graphe original et celle du graphe transposé par cette méthode sont identiques.

Notons que les structures directes de forme I ont recours à un grand nombre de délais unités.

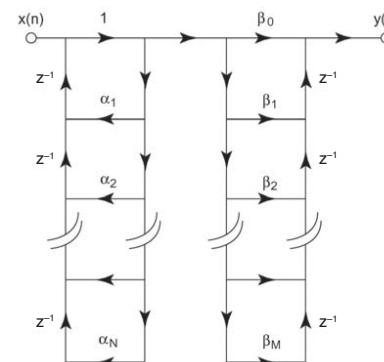


Figure 6.3.2 Structure directe transposée de forme I, $M \leq N$

La figure 6.3.3 représente une structure directe de forme II de la fonction de transfert $H(z)$ de l'équation 6.3.1.

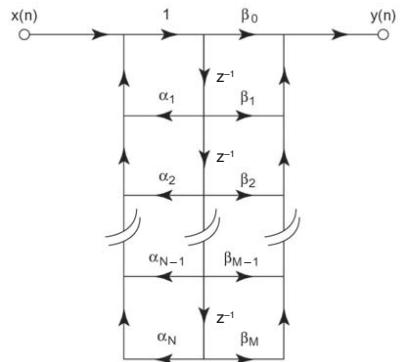


Figure 6.3.3 Structure directe de forme II, $M \leq N$

La figure 6.3.4 représente une structure directe transposée de forme II de la fonction de transfert de l'équation 6.3.1. Elle est obtenue par la méthode de transposition décrite plus haut, appliquée à la structure de la figure 6.3.3.

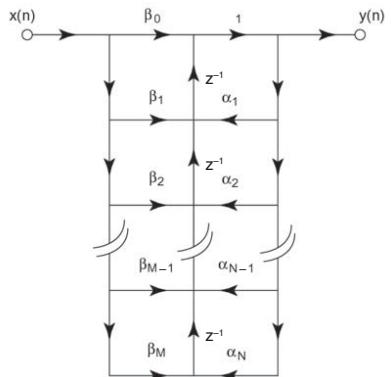


Figure 6.3.4 Structure directe transposée de forme II, $M \leq N$

Le nombre de délais unités de chacune des structures directes de forme II illustrées aux figures 6.3.3 et 6.3.4 est égal à l'ordre N de la fonction de transfert. C'est pourquoi elles sont nommées structures canoniques.

7 Conception des filtres récursifs

7.1 Introduction

La première étape de la conception d'un filtre numérique de type RII consiste à obtenir une fonction de transfert rationnelle causale et stable $H(z)$, dont la réponse fréquentielle remplit des spécifications données. Les structures qui ont été étudiées au chapitre 6 peuvent être ensuite utilisées pour mettre en œuvre de façon efficace les équations aux différences du système requis.

Il est possible, comme nous le démontrerons plus loin, de transformer une fonction de transfert $t(s)$ appartenant au domaine S, en une fonction de transfert $H(z)$ correspondante, appartenant au domaine Z, de telle sorte que la réponse fréquentielle ou impulsionnelle de $H(z)$ soit une approximation de celle de $t(s)$. On peut donc mettre à profit toute la gamme disponible de méthodes de conception des filtres analogiques pour obtenir la fonction de transfert $H(z)$ requise, en utilisant l'approche suivante :

- a. Obtenir une fonction de transfert stable $t(s)$ remplissant les spécifications données.
- b. Transformer $t(s)$ en une fonction de transfert stable correspondante $H(z)$ ayant approximativement la même réponse fréquentielle (ou impulsionnelle) que $t(s)$.

Dans ce chapitre, nous présenterons deux méthodes pour obtenir des fonctions de transfert de type passe-bas, passe-haut, passe-bande et coupe-bande appartenant au domaine S et répondant à des spécifications données. Nous étudierons ensuite deux méthodes permettant de transformer une fonction de transfert $t(s)$ donnée en une fonction de transfert $H(z)$ qui lui correspond conformément au sens défini ci-dessus. Nous démontrerons aussi que si les fonctions de transfert appartenant au domaine S auxquelles ces méthodes de transformations sont appliquées sont stables, les fonctions de transfert appartenant au domaine Z qu'elles génèrent le sont aussi.

7.2 Quelques méthodes de conception des filtres analogiques

Comme nous l'avons déjà mentionné, le point de départ de toutes les méthodes de conception des filtres numériques qui seront décrites dans ce chapitre est l'obtention de fonctions de transfert appartenant au domaine S remplissant des spécifications données. Nous décrirons donc brièvement, pour commencer, deux méthodes permettant d'obtenir de telles fonctions de transfert. Pour une couverture beaucoup plus complète des méthodes de synthèse des filtres analogiques, il est possible de se référer à l'abondante littérature qui traite de ce sujet.

7.2.1 Fonction de transfert du filtre passe-bas de Butterworth

Le module de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert $T(S)$ du filtre passe-bas de Butterworth d'ordre n est donné par :

$$|T(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2n}}}, \quad \Omega = 2\pi F \quad (7.2.1)$$

où F est la fréquence en Hz, Ω est la pulsation en rad/s, n est l'ordre de la fonction de transfert $T(S)$ et Ω_c est la pulsation de coupure. Cette dernière correspond à une atténuation de 3dB de la valeur du module de la fonction de transfert par rapport à sa valeur à $\Omega = 0$.

La figure 7.2.1 représente le comportement des modules des réponses fréquentielles des fonctions de transfert passe-bas de Butterworth d'ordre $n = 1, 2, 3, 4, 5$, en fonction de Ω/Ω_c . Plus l'ordre n de la fonction de transfert est élevé, plus le module de sa réponse fréquentielle se rapproche de celui du filtre passe-bas idéal. On notera que pour toutes les valeurs de n :

$$|T(j0)| = 1, |T(j\Omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707, |T(j\Omega)|_{\Omega \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (7.2.2)$$

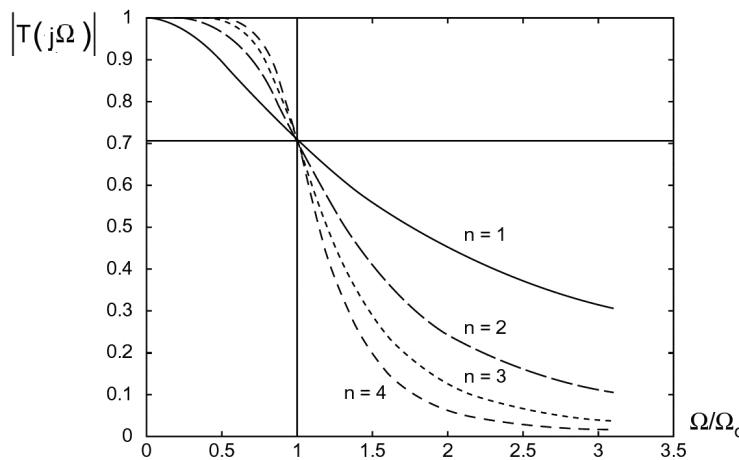


Figure 7.2.1 Module de quelques fonctions de transfert passe-bas de Butterworth

Si les spécifications du filtre passe-bas de Butterworth requis sont données par:

- S1. Atténuation inférieure ou égale à A_p dB à la pulsation Ω_p dans la bande passante.
- S2. Atténuation égale ou supérieure à A_q dB à la pulsation Ω_q dans la bande d'atténuation.

Il est possible de démontrer que l'ordre minimal n , de la fonction de transfert $T(S) = 1/D(S)$ du filtre passe-bas de Butterworth répondant à ces spécifications, peut être calculé à l'aide de la relation suivante:

$$n \geq \frac{\log \sqrt{10^{A_q/10} - 1}}{\log \left\{ \frac{\Omega_q}{\Omega_p} \right\}} \quad (7.2.3)$$

Les fonctions de transfert passe-bas de Butterworth normalisées $T(S)$ (pulsation de coupure = 1 rad/s) d'ordre $1 \leq n \leq 6$ sont données par le tableau T7.2.1. Toute fonction de transfert $t(s)$ de même type et de même ordre mais dont la pulsation de coupure est Ω_c peut être obtenue à l'aide de la relation suivante:

$$t(s) = T(S) \Big|_{S=s/\Omega_c} = T(s/\Omega_c) \quad (7.2.4)$$

Dans les cas où la spécification S1 requiert une atténuation exactement égale à A_p dB à la pulsation Ω_p , la pulsation de coupure requise est alors donnée par:

$$\Omega_{cp} = \frac{\Omega_p}{\left[10^{A_p/10} - 1 \right]^{1/2n}} \quad (7.2.5)$$

Dans les cas où la spécification S2 requiert une atténuation exactement égale à A_q dB à la pulsation Ω_q , la pulsation de coupure devient:

$$\Omega_{cq} = \frac{\Omega_q}{\left[10^{A_q/10} - 1 \right]^{1/2n}} \quad (7.2.6)$$

Dans les cas où les spécifications S1 et S2 sont données sous la forme générale mentionnée plus haut, la pulsation de coupure de la fonction de transfert requise peut alors être arbitrairement choisie dans la plage de pulsations définie par:

$$\Omega_{cp} \leq \Omega_c \leq \Omega_{cq} \quad (7.2.7)$$

n	Tableau T7.2.1 Fonctions de transfert passe-bas de Butterworth normalisées. Pulsion de coupure: 1 rad/s.
1	$\frac{1}{S+1}$
2	$\frac{1}{S^2 + 1.4142S + 1}$
3	$\frac{1}{S^3 + 2S^2 + 2S + 1}$
4	$\frac{1}{S^4 + 2.6131S^3 + 3.4142S^2 + 2.6131S + 1}$
5	$\frac{1}{S^5 + 3.2361S^4 + 5.2361S^3 + 5.2361S^2 + 3.2361S + 1}$
6	$\frac{1}{S^6 + 3.8637S^5 + 7.4641S^4 + 9.1416S^3 + 7.4641S^2 + 3.8637S + 1}$

7.2.2 Fonction de transfert du filtre passe-bas de Tchebycheff¹

Le module de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert $T_C(S)$ du filtre passe-bas de Tchebycheff d'ordre n est donné par:

$$|T(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad \Omega = 2\pi F \quad (7.2.8)$$

où $C_n(\Omega)$ est la fonction de Tchebycheff d'ordre n définie comme suit:

$$C_n(\Omega) = \begin{cases} \cos[n \cos^{-1}(\Omega)], & 0 \leq \Omega \leq 1 \\ \cosh[n \cosh^{-1}(\Omega)], & \Omega > 1 \end{cases} \quad (7.2.9)$$

$0 < \varepsilon \leq 1$ est le coefficient d'ondulation et Ω_p est la pulsation de fin de bande d'ondulation. La figure 7.2.2 représente le comportement des modules des réponses fréquentielles des fonctions de transfert passe-bas de Tchebycheff d'ordre $n = 1, 2, 3$ en fonction de Ω/Ω_p .

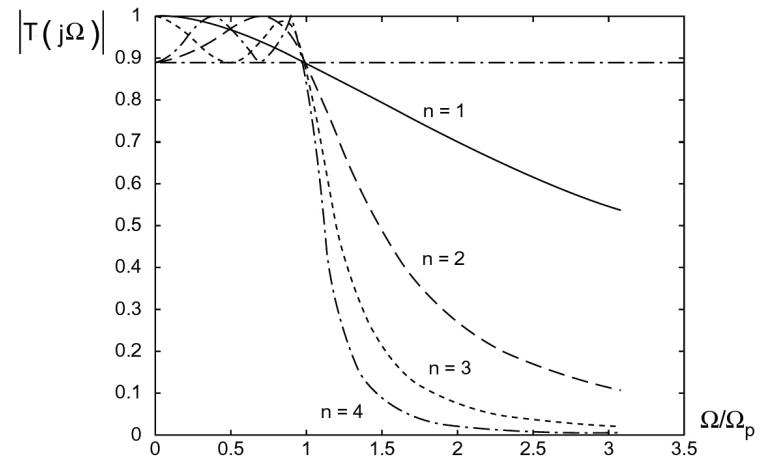


Figure 7.2.2 Modules de quelques fonctions de transfert passe-bas de Tchebycheff

On notera que:

- a. Pour toute valeur de n , il existe deux bandes de pulsations distinctes : la bande d'ondulation et la bande d'atténuation. La bande d'ondulation s'étend de la pulsation zéro à la pulsation de fin de bande d'ondulation Ω_p . La bande d'atténuation s'étend de la pulsation Ω_p à $\Omega \rightarrow \infty$.
- b. Le nombre d'extremums (les maximums et minimums) qui se trouvent dans la bande d'ondulation est égal à l'ordre n de la fonction de transfert. Le premier de ces extrema est à $\Omega = 0$.
- c. La valeur du module de la fonction de transfert de Tchebycheff à $\Omega = \Omega_p$ est donnée par :

$$|T(j\Omega_p)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad (7.2.10)$$

1. On trouve dans la littérature plusieurs autres graphies pour ce nom dont Tchebychev, Chebyshev, Chebychev, Tschebyscheff et Tchebyscheff.

d. Les valeurs du module de la fonction de transfert à la pulsation $\Omega = 0$ sont:

$$|T(j0)| = \begin{cases} 1, & n \text{ impair} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon^2}}, & n \text{ pair} \end{cases} \quad (7.2.11)$$

Si les spécifications d'un filtre passe-bas de Tchebycheff sont données par:

- S1. Ondulation de A_p dB dans la bande d'ondulation $0 \leq \Omega \leq \Omega_p$.
- S2. Atténuation supérieure à A_q dB à la pulsation Ω_q dans la bande d'atténuation.

On peut démontrer que l'ordre minimal n de la fonction de transfert $T(S) = K/D(S)$ du filtre passe-bas de Tchebycheff répondant à ces spécifications peut être calculé à l'aide de la relation suivante:

$$n \geq \frac{\cosh^{-1} \left\{ \sqrt{\frac{10^{A_q/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}} \right\}}{\cosh^{-1} \left\{ \frac{\Omega_q}{\Omega_p} \right\}} \quad (7.2.12)$$

On notera que la relation entre l'amplitude A_p dB de l'ondulation du module de la fonction de transfert dans la bande d'ondulation et la valeur du coefficient d'ondulation ϵ est donnée par:

$$\epsilon = \sqrt{10^{A_p/10} - 1} \quad (7.2.13)$$

Les fonctions de transfert de Tchebycheff passe-bas normalisées $T(S)$ (pulsation de fin de bande d'ondulation : 1 rad/s) d'ordre $1 \leq n \leq 6$ sont données par le tableau T7.2.2 dans le cas où l'amplitude de l'ondulation est de 1 dB. Les fonctions de transfert $t(s)$ d'ordre n et de même amplitude d'ondulation, mais dont la pulsation de fin de bande d'ondulation est Ω_p , peuvent être obtenues à l'aide de la relation suivante:

$$t(s) = T(s / \Omega_p) \quad (7.2.14)$$

où Ω_p est la pulsation requise de fin de bande d'ondulation.

n	Tableau T7.2.2 Fonctions de transfert passe-bas de Tchebycheff normalisées. Bande d'ondulation: $0 \leq \Omega \leq 1$ rad/s. Ondulation de 1 dB ($\epsilon = 0.5088$).
1	$\frac{1.9652}{S + 1.9652}$
2	$\frac{0.9826}{S^2 + 1.0977S + 1.1025}$
3	$\frac{0.4913}{S^3 + 0.9883S^2 + 1.2384S + 0.4913}$
4	$\frac{0.2456}{S^4 + 0.9528S^3 + 1.4539S^2 + 0.7426S + 0.2756}$
5	$\frac{0.1228}{S^5 + 0.9368S^4 + 1.6888S^3 + 0.9744S^2 + 0.5805S + 0.1228}$
6	$\frac{0.06141}{S^6 + 0.92825S^5 + 1.9308S^4 + 1.2021S^3 + 0.9393S^2 + 0.3071S + 0.068907}$

La pulsation de coupure Ω_c pour laquelle la valeur du module de la fonction de transfert passe-bas de Tchebycheff est de 3 dB inférieure à sa valeur maximale est donnée par:

$$\Omega_c = \Omega_p \cosh \left[\frac{1}{n} \cosh^{-1} \left(\frac{1}{\epsilon} \right) \right] \quad (7.2.15)$$

On notera qu'une fonction de transfert passe-bas de Butterworth est considérée comme étant normalisée lorsque sa pulsation de coupure est égale à l'unité, tandis qu'une fonction de transfert passe-bas de Tchebycheff est considérée comme étant normalisée lorsque sa pulsation de fin de bande d'ondulation est égale à l'unité.

TR1. Transformation passe-bas à passe-haut

$$S = \frac{\Omega'_u}{s}, \Omega = -\frac{\Omega'_u}{\Omega'} \quad (7.2.16)$$

Toute pulsation telle que Ω de la fonction de transfert passe-bas correspond à une pulsation Ω' de la fonction de transfert passe-bande.

Les pulsations $\pm \Omega'_u$ de la fonction de transfert passe-haut correspondent respectivement aux pulsations unités ∓ 1 rad/s de la fonction de transfert passe-bas normalisée.

TR2. Transformation passe-bas à passe-bande

$$S = \frac{s^2 + \Omega'^2_0}{Bs}, B = \Omega'_{p2} - \Omega'_{p1}, \Omega'^2_0 = \Omega'_{p1} \Omega'_{p2}, \Omega = \frac{\Omega'^2 - \Omega'^2_0}{B\Omega'} \quad (7.2.17)$$

Ω'_0 est la pulsation dite centrale de la fonction de transfert passe-bande.

Toute pulsation telle que Ω de la fonction de transfert passe-bas correspond à une pulsation Ω' de la fonction de transfert passe-bande.

Les pulsations $\pm \Omega'_{p1}$ et $\mp \Omega'_{p2}$ de la fonction de transfert passe-bande correspondent respectivement aux pulsations ∓ 1 rad/s de la fonction de transfert passe-bas normalisée.

TR3. Transformation passe-bas à coupe-bande

$$S = \frac{Bs}{s^2 + \Omega'^2_0}, B = \Omega'_{p2} - \Omega'_{p1}, \Omega'^2_0 = \Omega'_{p1} \Omega'_{p2}, \Omega = \frac{B\Omega'}{\Omega'^2_0 - \Omega'^2} \quad (7.2.18)$$

Ω'_0 est la pulsation dite centrale de la fonction de transfert coupe-bande.

Toute pulsation telle que Ω de la fonction de transfert passe-bas correspond à une pulsation Ω' de la fonction de transfert passe-bande.

7.2.3 Transformation des fonctions de transfert

Il est possible de transformer les fonctions de transfert passe-bas du domaine S en fonctions de transfert passe-haut, passe-bande ou coupe-bande à l'aide des relations de transformation données ci-dessous.

Dans ce qui suit, la variable complexe indépendante de la fonction de transfert passe-bas normalisée est S, tandis que celle de la fonction de transfert passe-haut, passe-bande ou coupe-bande obtenue par transformation est s. On utilisera $S = j\Omega$ et $s = j\Omega'$ pour passer au domaine fréquentiel.

Les pulsations $\pm\Omega'_{p1}$ et $\mp\Omega'_{p2}$ de la fonction de transfert coupe-bande correspondent respectivement aux pulsations de ± 1 rad/s de la fonction de transfert passe-bas normalisée.

Les relations énoncées ci-dessus peuvent être utilisées pour obtenir des fonctions de transfert de type passe-haut, passe-bande ou coupe-bande dont les caractéristiques remplissent des spécifications données. Pour atteindre ce but, la procédure suivante peut être utilisée.

- a. Transformer les spécifications données pour le module de la réponse fréquentielle de la fonction de transfert passe-haut, passe-bande ou coupe-bande requise, en spécifications du module de la réponse fréquentielle d'une fonction de transfert passe-bas normalisée correspondante, à l'aide des transformations TR1 à TR3.
- b. Calculer cette fonction de transfert passe-bas normalisée, à partir des spécifications obtenues en a) qui caractérisent le module de sa réponse fréquentielle, à l'aide des méthodes décrites aux sections 7.2.1 et 7.2.2.
- c. Obtenir la fonction de transfert requise en transformant, selon le cas considéré, la fonction de transfert passe-bas normalisée obtenue en b) en fonction de transfert passe-haut, passe-bande ou coupe-bande, en ayant recours aux transformations TR1 à TR3.

7.3 Méthode de la réponse impulsionnelle invariante

Nous décrirons ici une méthode permettant d'obtenir une fonction de transfert $H(z)$ (appartenant au domaine Z), ayant approximativement la même réponse impulsionnelle que celle d'une fonction de transfert $t(s)$ (appartenant au domaine S) donnée. La réponse fréquentielle de $H(z)$ est donc elle aussi approximativement la même que celle de $t(s)$.

Considérons, pour commencer, la fonction de transfert $t(s)$ du premier ordre:

$$t(s) = \frac{1}{s - p}, p = \sigma_p + j\omega_p \quad (7.3.1)$$

La réponse impulsionnelle de cette fonction de transfert est donnée par:

$$h_a(t) = e^{pt} u(t) = \begin{cases} e^{pt}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (7.3.2)$$

Si la période d'échantillonnage est T_s et que l'on pose $t = nT_s$ dans l'expression de $h_a(t)$ après l'avoir multipliée par T_s , on obtient alors la forme discrète suivante de cette réponse impulsionnelle. Pour alléger l'écriture, nous écrirons $h(n)$ au lieu de $h(nT_s)$.

$$h(n) = T_s e^{pnT_s} u(n) \quad (7.3.3)$$

La transformée en Z, $H(z)$, de $h(n)$ est donnée par:

$$H(z) = \frac{T_s}{1 - e^{pT_s} z^{-1}} \quad (7.3.4a)$$

On peut donc dire que:

- a. La réponse impulsionnelle du système dont la fonction de transfert est $H(z)$ est approximativement la même que celle du système dont la fonction de transfert est $t(s)$.
- b. Si $t(s)$ est stable, c'est-à-dire si $\sigma_p < 0$, alors $H(z)$ est stable aussi puisque dans ce cas, le module $|e^{pT_s}|$ du pôle de $H(z)$ est à l'intérieur du cercle unité. En effet:

$$\left| e^{pT_s} \right| = \left| e^{(\sigma_p + j\omega_p)T_s} \right| = \left| e^{\sigma_p T_s} \right| < 1 \quad (7.3.4b)$$

Il est donc possible d'utiliser la méthode décrite ci-dessous pour transformer une fonction de transfert appartenant au domaine S donnée en une fonction de transfert appartenant au domaine Z, ayant approximativement la même réponse impulsionnelle et, par conséquent, approximativement la même réponse fréquentielle.

- a. Obtenir une décomposition en fractions partielles du premier ordre de la fonction de transfert analogique $t(s)$.

- b. Effectuer la transformation suivante pour chacune de ces fractions partielles:

$$\frac{1}{s - p} \rightarrow \frac{T_s}{1 - e^{pT_s} z^{-1}} \quad (7.3.5)$$

- c. Dans les cas où le dénominateur de la fonction de transfert $t(s)$ comporte des facteurs du deuxième ordre à racines complexes, il peut être avantageux d'avoir recours à la relation suivante qui découle directement de la relation de base de l'équation 7.3.5.

$$\frac{c_1 s + c_0}{s^2 + d_1 s + d_0} \rightarrow \frac{T_s \left\{ c_1 - z^{-1} e^{-\sigma T_s} \left[c_1 \cos(\gamma T_s) + \left(\frac{c_1 \sigma - c_0}{\gamma} \right) \sin(\gamma T_s) \right] \right\}}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma T_s} \cos(\gamma T_s) + z^{-2} e^{-2\sigma T_s}} \quad (7.3.6a)$$

$$\sigma = \frac{d_1}{2}, \gamma = \sqrt{d_0 - \frac{d_1^2}{4}} \quad (7.3.6b)$$

L'application de la transformation décrite ci-dessus à une fonction de transfert $t(s)$ (appartenant au domaine S) génère une fonction de transfert $H(z)$ (appartenant au domaine Z), ayant la même réponse impulsionnelle que celle de $t(s)$. Il faut toutefois noter que la réponse fréquentielle de $H(z)$ ne sera une bonne approximation de celle de $t(s)$ que si la réponse fréquentielle de $t(s)$ est limitée à la plage de fréquences définie par $|F| \leq F_s/2$, où F_s désigne la fréquence d'échantillonnage utilisée. En effet, la réponse fréquentielle de $H(z)$ est formée par la répétition périodique à intervalles fréquentiels F_s de celle de $t(s)$. Il s'ensuit que si cette dernière s'étend au-delà de la fréquence $F_s/2$, il en résultera nécessairement une distorsion de la réponse fréquentielle de $H(z)$ par rapport à celle de $t(s)$ en raison du chevauchement de ces répétitions. La méthode de la réponse impulsionnelle invariante ne convient donc pas à la transformation des fonctions de transfert du type passe-haut. Elle ne convient pas non plus aux fonctions de transfert multibandes. Elle donne toutefois de bons résultats pour les fonctions de transfert de types passe-bas et pour certaines fonctions de transfert de type passe-bande. En pratique, si l'atténuation du module de la réponse fréquentielle de $t(s)$ est de l'ordre de 40 dB ou plus à la fréquence $F_s/2$ par rapport à sa valeur maximale, la distorsion due aux chevauchements est négligeable et la réponse fréquentielle de $H(z)$ est très proche de celle de $t(s)$. Dans ce qui suit, toutes les conditions requises, pour que la méthode de transformation que nous venons de décrire génère des fonctions de transfert numériques ayant les mêmes réponses impulsionnelles que celles dont elles découlent, sont supposées être remplies.

La transformée de Laplace $X_L(s)$ d'une fonction continue $x(t)$ est définie par:

$$L\{x(t)\} = X_L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt \quad (7.4.1)$$

La transformée en Z de la version discrète $x(nT)$ de $x(t)$, où n est un entier positif ou négatif et T_S est la période d'échantillonnage, est donnée par:

$$Z\{x(nT)\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_S) z^{-n} \quad (7.4.2)$$

Il est possible de démontrer à partir des équations 7.4.1 et 7.4.2, que si la fonction $x(t)$ répond à certaines conditions que nous supposerons remplies ici, le passage du domaine S au domaine Z peut se faire selon la relation suivante:

$$z = e^{sT_S} \leftrightarrow s = \frac{1}{T_S} \ln(z) \quad (7.4.3)$$

La fréquence d'échantillonnage $F_S = 1/T_S$ doit être égale ou supérieure à la fréquence de Nyquist.

La relation de l'équation 7.4.3 peut être réécrite, sous certaines conditions que nous supposerons respectées ici, sous la forme d'un développement en série infinie comme suit:

$$s = \frac{2}{T_S} \left[\left(\frac{z-1}{z+1} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^3 + \dots \right] \quad (7.4.4)$$

Si l'on ne conserve que le premier terme de cette série, on obtient une approximation dénommée la transformation bilinéaire (TB) qui est définie comme suit:

$$s = \lambda \left(\frac{z-1}{z+1} \right), \lambda = \frac{2}{T_S} \quad (7.4.5)$$

Il peut être avantageux, dans certains cas, de redéfinir autrement la valeur de la constante λ .

Si l'on pose $s = \sigma + j\Omega$ et $z = re^{j\omega}$, $r > 0$ dans l'équation 7.4.6, l'on obtient:

$$\sigma = \lambda \left(\frac{r^2 - 1}{1 + 2r \cos \omega + r^2} \right), \Omega = \lambda \left(\frac{2r \sin \omega}{1 + 2r \cos \omega + r^2} \right) \quad (7.4.6)$$

7.4 Transformation bilinéaire

Nous présenterons ici une méthode permettant de transformer une fonction de transfert appartenant au domaine S telle que $t(s)$ en une fonction de transfert $H(z)$, appartenant au domaine Z et ayant approximativement la même réponse fréquentielle que celle de $t(s)$.

Ou inversement:

$$r = \sqrt{\frac{(\lambda + \sigma)^2 + \Omega^2}{(\lambda - \sigma)^2 + \Omega^2}}, \omega = \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\lambda + \sigma}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\lambda - \sigma}\right) \quad (7.4.7)$$

Ainsi, selon les équations 7.4.6 et 7.4.7, pour toute valeur de Ω , la TB définie par l'équation 7.4.5 donne pour $r > 0$:

$$\begin{aligned} \sigma > 0 &\leftrightarrow r > 1 \\ \sigma = 0 &\leftrightarrow r = 1 \\ \sigma < 0 &\leftrightarrow r < 1 \end{aligned} \quad (7.4.8)$$

On peut déduire de l'analyse détaillée des équations 7.4.6 et 7.4.7 que la transformation bilinéaire fait correspondre, comme illustré par la figure 7.4.1:

- Le demi-plan complexe gauche ($\text{Re}\{s\} < 0$) du domaine S, à l'intérieur du cercle unité $|z| = 1$ du plan complexe Z.
- L'axe imaginaire $s = j\Omega$ du plan complexe S, au cercle unité $|z| = 1$ du plan complexe Z.
- Le demi-plan complexe droit ($\text{Re}\{s\} > 0$) du domaine S, à l'extérieur du cercle unité $|z| = 1$ du plan complexe Z.

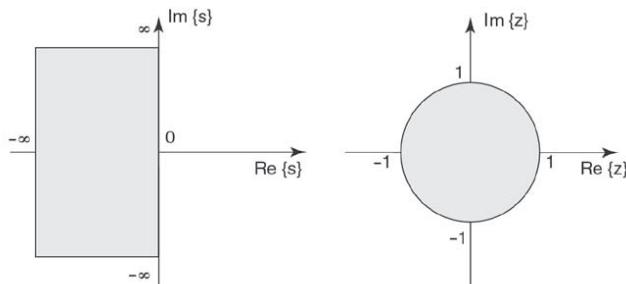


Figure 7.4.1 Correspondance, entre le demi-plan complexe gauche ($\text{Re}\{s\} < 0$) et l'intérieur du cercle unité $|z| = 1$ du plan complexe Z, donnée par la transformation bilinéaire

Par conséquent, l'application de la TB à une fonction de transfert $t(s)$ causale et stable du domaine S donne toujours une fonction de transfert $H(z)$ causale et stable du domaine Z. C'est une propriété très importante de cette transformation.

Dans cette section, les symboles Ω , Ω' et $\hat{\Omega}$ représenteront des pulsations analogiques (domaine S) tandis que le symbole Ω représentera des pulsations numériques (domaine Z).

Pour étudier la réponse fréquentielle résultant de l'application de la TB, utilisons les équations 7.4.9 donnée ci-dessous dans l'équation 7.4.5:

$$s = j\Omega, z = e^{j\omega} \quad (7.4.9)$$

Nous obtenons alors:

$$j\Omega = \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega} - 1}{e^{j\omega} + 1} = \frac{2}{T_s} \frac{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}{e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}} = j \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (7.4.10)$$

Donc:

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow \omega = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\Omega T_s}{2}\right) \quad (7.4.11)$$

En utilisant la relation:

$$\omega = 2\pi \frac{F}{F_s} = \tilde{\Omega} T_s \quad (7.4.12)$$

Dans l'équation 7.4.11, on obtient avec $\lambda = 2/T_s$:

$$\Omega = \frac{2}{T_s} \tan\left(\frac{\tilde{\Omega} T_s}{2}\right) \Leftrightarrow \tilde{\Omega} = \frac{2}{T_s} \tan^{-1}\left(\frac{\Omega T_s}{2}\right) \quad (7.4.13)$$

Cette relation entre Ω et $\tilde{\Omega}$ est illustrée par la figure 7.4.2 pour $\lambda = 1$.

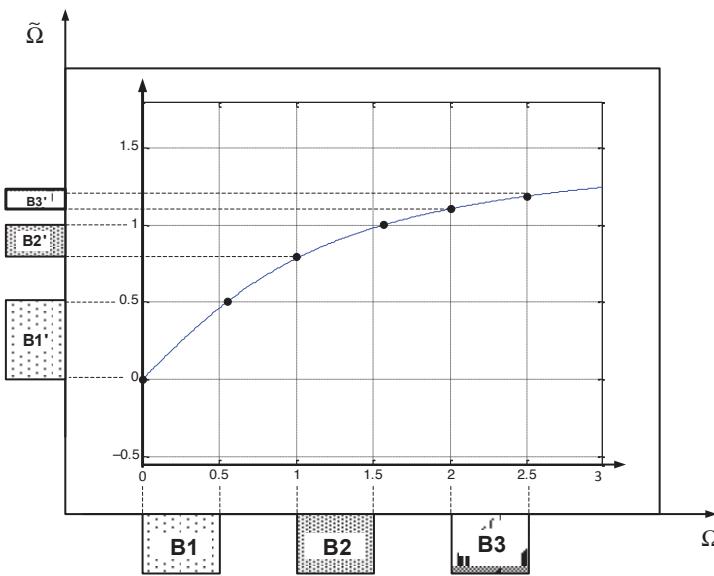


Figure 7.4.2 Relation entre Ω et $\tilde{\Omega}$ pour $\lambda = 1$

On observe que les bandes de fréquences B_1 , B_2 et B_3 de Ω qui sont toutes les trois de même largeur génèrent respectivement les bandes de fréquences B'_1 , B'_2 et B'_3 de $\tilde{\Omega}$ dont les largeurs respectives diminuent avec la fréquence.

Ce comportement illustre l'effet de la transformation bilinéaire sur la réponse fréquentielle des fonctions de transfert analogiques auxquelles on l'applique.

Dans le cas où :

$$\left(\frac{\tilde{\Omega}_{\max} T_s}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(2\pi \frac{F_{\max}}{F_s} \right) = \pi \left(\frac{F_{\max}}{F_s} \right) < \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow F_s > 5F_{\max} \quad (7.4.14)$$

c'est-à-dire pour une fréquence d'échantillonnage F_s beaucoup plus grande que la fréquence la plus élevée F_{\max} présente dans le signal, et en utilisant l'approximation des petits angles donnée par $\sin(\theta) \cong \tan(\theta) \cong \theta$, $\cos(\theta) = 1$ dans l'équation 7.4.13, on obtient :

$$\Omega \cong \tilde{\Omega} \quad (7.4.15)$$

On remarque donc que plus la fréquence d'échantillonnage est supérieure à la fréquence la plus élevée présente dans le signal, c'est-à-dire plus le rapport F_s/F augmente, plus la qualité de l'approximation en fréquence fournie par la TB s'améliore.

L'application de la TB à une fonction de transfert appartenant au domaine S telle que $t(s)$ peut donc être représentée par la relation suivante :

$$t(s) \rightarrow t \left(\lambda \left(\frac{z-1}{z+1} \right) \right) = H(z), \lambda = \frac{2}{T_s} \quad (7.4.16)$$

Ce qui, dans le domaine fréquentiel, correspond à :

$$\begin{aligned} t(j\Omega) \rightarrow H \left(e^{j\tilde{\Omega}T_s} \right) &= t \left(j \lambda \tan \left(\frac{\tilde{\Omega}T_s}{2} \right) \right) \\ &= H \left(e^{j\omega} \right) = t \left(j \lambda \tan \left(\frac{\omega}{2} \right) \right) \end{aligned} \quad (7.4.17)$$

ω_{LP} : Pulsation de coupure de la fonction de transfert passe-bas originale.

ω_{HP} : Pulsation de coupure de la fonction de transfert passe-haut requise.

TLB. Transformation passe-bas à passe-bande

$$Z^{-1} = \frac{z^{-2} - \left(\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_2 + 1} \right) z^{-1} + \left(\frac{\rho_2 - 1}{\rho_2 + 1} \right)}{\left(\frac{\rho_2 - 1}{\rho_2 + 1} \right) z^{-2} - \left(\frac{2\rho_1\rho_2}{\rho_2 + 1} \right) z^{-1} + 1} \quad (7.7.3a)$$

$$\rho_1 = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{BP2} + \omega_{BP1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{BP2} - \omega_{BP1}}{2}\right)}, \rho_2 = \cot\left(\frac{\omega_{BP2} - \omega_{BP1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\omega_{IP}}{2}\right) \quad (7.7.3b)$$

ω_{LP} : Pulsation de coupure de la fonction de transfert passe-bas originale.

ω_{BP1} : Pulsation de coupure inférieure de la fonction de transfert passe-bande requise.

ω_{BP2} : Pulsation de coupure supérieure de la fonction de transfert passe-bande requise.

7.7 Transformation des fonctions de transfert du domaine Z

Il est possible d'utiliser les relations données ci-dessous pour transformer une fonction de transfert passe-bas de type RII donnée appartenant au domaine Z, en fonction de transfert passe-bas, passe-haut, passe-bande ou coupe-bande dont la ou les pulsations de coupure sont spécifiées.

TLL. Transformation passe-bas à passe-bas

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1} - \rho_L}{1 - \rho_L z^{-1}}, \rho_L = \frac{\sin\left(\frac{\omega_{IP1} - \omega_{IP2}}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_{IP1} + \omega_{IP2}}{2}\right)} \quad (7.7.1)$$

ω_{IP1} : Pulsation de coupure de la fonction de transfert passe-bas originale.

ω_{IP2} : Pulsation de coupure de la fonction de transfert passe-bas requise.

TLH. Transformation passe-bas à passe-haut

$$Z^{-1} = \frac{z^{-1} + \rho_H}{1 + \rho_H z^{-1}}, \rho_H = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{IP} + \omega_{HP}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{IP} - \omega_{HP}}{2}\right)} \quad (7.7.2)$$

TLS. Transformation passe-bas à coupe-bande

$$Z^{-1} = \frac{z^{-2} - \left(\frac{2\rho_1}{\rho_2 + 1} \right) z^{-1} + \left(\frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2} \right)}{\left(\frac{1 - \rho_2}{1 + \rho_2} \right) z^{-2} - \left(\frac{2\rho_1}{1 + \rho_2} \right) z^{-1} + 1} \quad (7.7.4a)$$

$$\rho_1 = \frac{\cos\left(\frac{\omega_{BS2} + \omega_{BS1}}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega_{BS2} - \omega_{BS1}}{2}\right)}, \rho_2 = \tan\left(\frac{\omega_{BS2} - \omega_{BS1}}{2}\right) \tan\left(\frac{\omega_{IP}}{2}\right) \quad (7.7.4b)$$

ω_{LP} : Pulsation de coupure de la fonction de transfert passe-bas originale.

ω_{BS1} : Pulsation de coupure inférieure de la fonction de transfert coupe-bande requise.

ω_{BS2} : Pulsation de coupure supérieure de la fonction de transfert coupe-bande requise.