TNS
Traitement Numérique du Signal

frederic.nicolier@univ-reims.fr

URCA - IUT Troyes - GEII

Plan général

1. Signaux numériques
2. Systèmes numériques
3. Principales propriétés de la TZ
4. Filtres numériques
5. Quelques filtres RIF
6. Synthèse de filtres numériques

Plan

1. Signaux numériques

2. Systèmes numériques

3. Principales propriétés de la TZ

4. Filtres numériques

5. Quelques filtres RIF

6. Synthèse de filtres numériques

1.1 APPLICATIONS :

1.2 SIGNAUX NUMÉRIQUES :

Un signal est le support physique d'une information (ex : signaux sonores, visuels)

- signaux continus (analogiques),
- discrets (échantillonnés - *sampled*),
- numériques (échantillonnés et quantifiés) : *digital signal*

1.2 SIGNAUX NUMÉRIQUES :

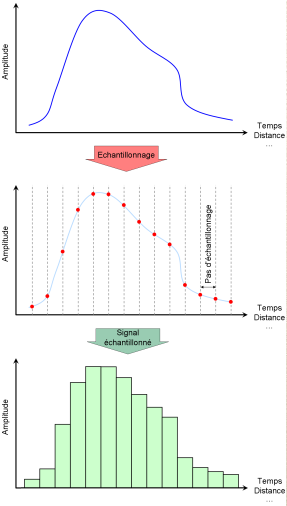


FIGURE – numérisation

1.2 SIGNAUX NUMÉRIQUES :

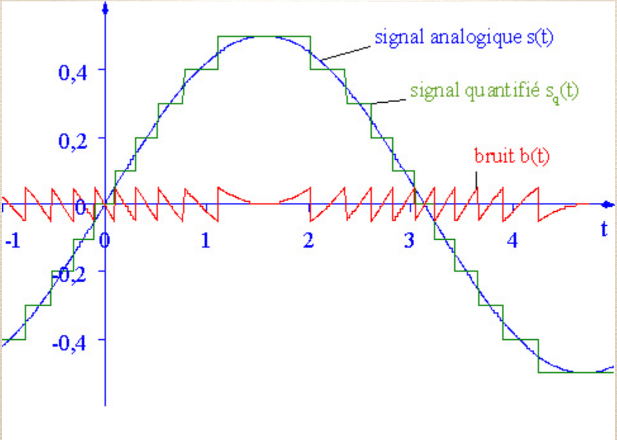


FIGURE – numérisation

1.2 SIGNAUX NUMÉRIQUES :

QUESTION 1[1] - Par rapport à un signal analogique, un signal numérique est :

1. plus fidèle à l'information initiale
2. plus robuste au bruit
3. plus durable dans le temps

1. http://lc.cx/PDu

1.2 SIGNAUX NUMÉRIQUES :

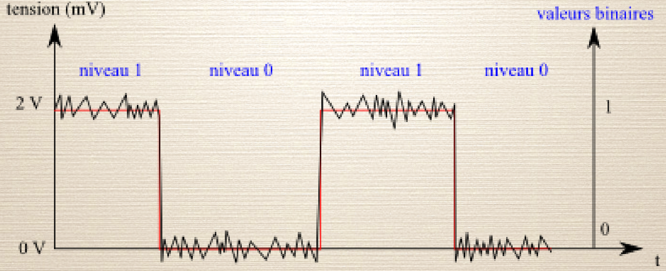


FIGURE – Signal bruité

1.3 NOTATION MATHÉMATIQUE DES SIGNAUX DISCRETS :

Un signal discret est une **liste ordonnée** de valeurs réelles ou complexes.
En mathématique, on le représente donc par **une suite numérique**

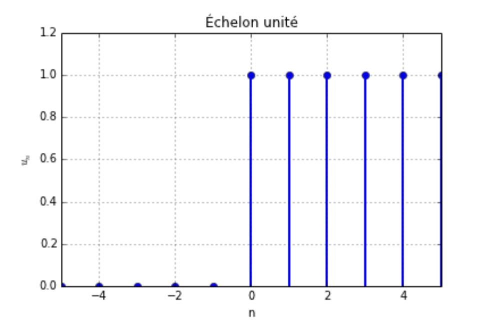
(DÉFINITION) Une **suite numérique** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une application de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). u_n est le **terme général de la suite**.

Le terme général sera noté u_n ou $u(n)$.

1.4 SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES :

- Échelon unité

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

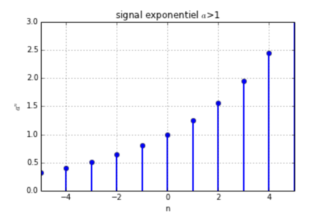


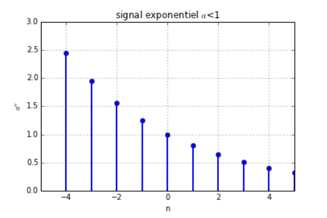
1.4 SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES :

- Signal exponentiel

$$x_n = a^n$$

(suite géométrique)

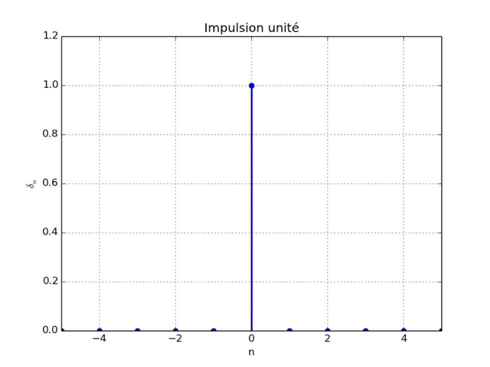




1.4 SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES :

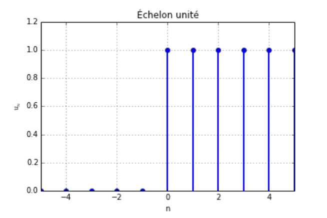
- impulsion unité

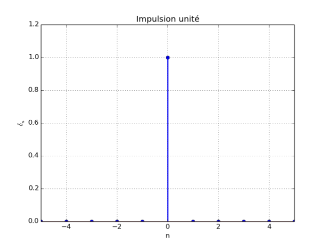
$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$



1.5 COMBINAISONS DE SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES :

Considérons l'échelon et l'impulsion unité :

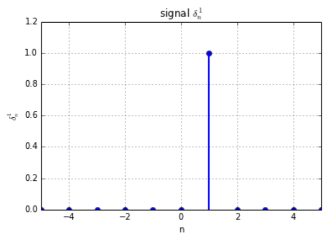




Cherchons à construire u à partir de δ.

1.5 COMBINAISONS DE SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES :

Soit δ l'impulsion unité, voici le signal δ_1



QUESTION 2[2] - L'expression mathématique de δ_1 est

1. $\delta(n-1)$
2. $\delta(1-n)$
3. $\delta(n+1)$
4. $\delta(1+n)$

---

2. http://lc.cx/PDu

1.5 COMBINAISONS DE SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES :

On peut donc écrire

$$u(n) = \delta(n) + \delta(n-1) + \delta(n-2) + \dots$$

donc

$$u(n) = \sum_k \delta(n-k)$$

1.5 COMBINAISONS DE SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES :

De même, le signal exponentiel $x(n) = a^n$ peut s'écrire

$$x(n) = \delta(n) + a\delta(n-1) + a^2\delta(n-2) + \ldots$$

soit

$$x(n) = \sum_k a^k \delta(n-k)$$

1.5 COMBINAISONS DE SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES :

En généralisant, tout signal discret peut s'écrire comme une somme infinie pondérée d'impulsions unités.

$$x(n) = a_0\delta(n) + a_1\delta(n-1) + a_2\delta(n-2) + \ldots$$

ou encore

$$x(n) = \sum_k a_k\delta(n-k)$$

(*Retenez bien cette équation !*)

1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

Revenons sur l'échelon unité :

$$u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

que l'on peut également écrire comme :

$$u_n = U(nT_e)$$

avec

$$U(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ u est la version **échantillonnée** de U.

1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

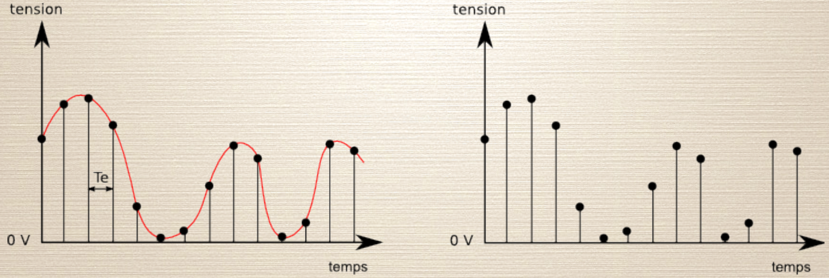


FIGURE – Signal échantillonné

1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

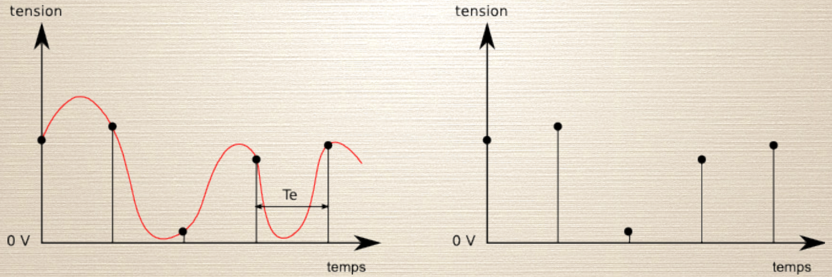
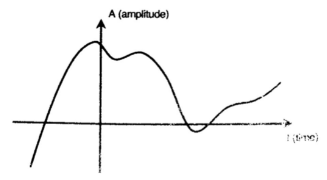


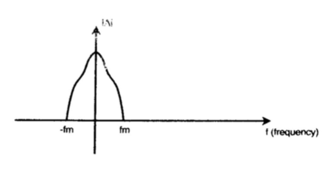
FIGURE – Signal mal échantillonné

Comment choisir la fréquence d'échantillonnage ?

1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

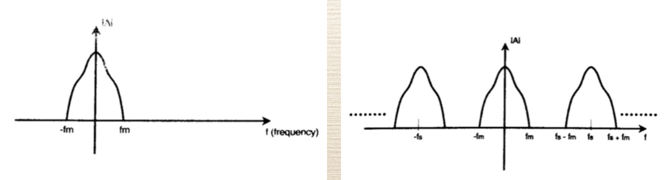
Observons le contenu fréquentiel d'un signal qui ne comporte aucunes fréquences supérieures à f_m





1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

Si l'on échantillonne à une fréquence f_s, le contenu fréquentiel est répété à chaque f_s.



1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

QUESTION 3[3] - Pour que l'on puisse obtenir un signal échantillonné correct, la fréquence d'échantillonnage f_s doit vérifier :

1. $f_s > 2f_m$
2. $f_s < 2f_m$
3. $f_s > \frac{1}{2}f_m$
4. $f_s < \frac{1}{2}f_m$

3. http://lc.cx/PDu

1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

Lorsque $f_s < 2f_m$, les contenus fréquentiels se recouvrent.

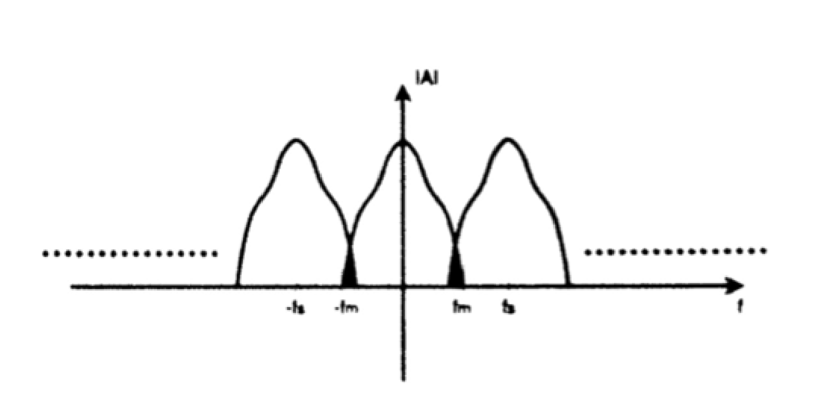


FIGURE – Spectre d'un signal échantillonné

1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

(THÉORÈME D'ÉCHANTILLONNAGE DE NYQUIST-SHANNON)

La représentation discrète d'un signal par des échantillons régulièrement espacés exige une fréquence d'échantillonnage supérieure au double de la fréquence maximale présente dans ce signal

1.6 ÉCHANTILLONNAGE :

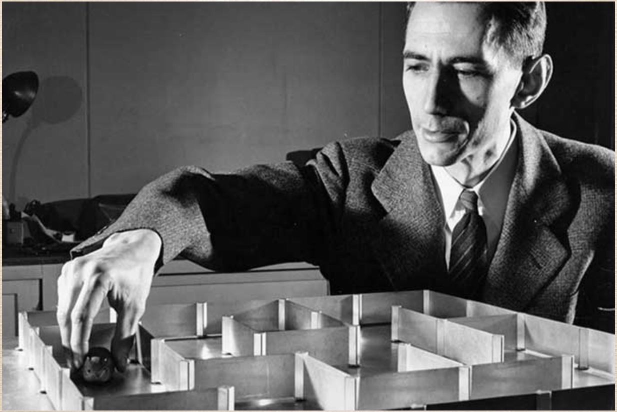


FIGURE – Claude Shannon (1916–2001)

Également inventeur de la machine ultime [4]

4. http://www.instructables.com/id/The-Most-Useless-Machine/

Plan

1. Signaux numériques

2. Systèmes numériques

3. Principales propriétés de la TZ

4. Filtres numériques

5. Quelques filtres RIF

6. Synthèse de filtres numériques

2.1 ÉTUDE D'UN SYSTÈME DISCRET SIMPLE :

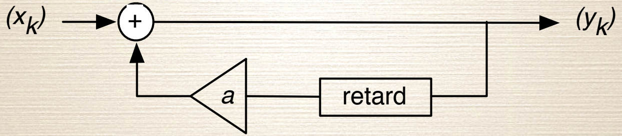


FIGURE – système discret simple

$$y_k = x_k + a y_{k-1}. \quad (0)$$

- C'est une **équation aux différences** (simple)
- Cherchons à exprimer explicitement (y_k) en fonction de (x_k)

2.1 ÉTUDE D'UN SYSTÈME DISCRET SIMPLE :

On a donc

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{k} a^{k-n} x_n.$$

Reformulons la sortie en posant

$$h_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ a^k & \text{si } k \geq 0 \end{cases}.$$

2.1 Étude d'un système discret simple :

On a donc

$$y_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{k-n} x_n$$

y est le résultat du produit de convolution entre h et x.

2.1 ÉTUDE D'UN SYSTÈME DISCRET SIMPLE :

- h est la réponse impulsionnelle du système
- S : système linéaire et invariant par translation
- h est suffisant pour entièrement caractériser le système S :

$$h = S(\delta)$$

$$x(k) = \sum_n a_n \delta(k-n)$$

$$y(k) = \sum_n x(n) h(k-n)$$

2.1 ÉTUDE D'UN SYSTÈME DISCRET SIMPLE :

(h_n) est donc la réponse impulsionnelle du système.

- A partir de
$$y(k) = \sum_n x(n)h(k-n)$$
avec
$$h_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ a^k & \text{si } k \geq 0 \end{cases}.$$
$\Rightarrow$ Cherchons la réponse à une entrée
$$x_k = z^k$$
où z est un nombre complexe fixé.
- Montrons alors que
$$y_k = \frac{z}{z-a} x_k.$$

2.1 ÉTUDE D'UN SYSTÈME DISCRET SIMPLE :

$$H(z) = \frac{z}{z-a}$$

est la **fonction de transfert** du filtre.

- C'est une fonction de la variable z, définie dans le domaine $|z| > |a|$.
- Un calcul analogue au précédent nous donne H en fonction de h :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_n z^{-n}.$$

2.1 ÉTUDE D'UN SYSTÈME DISCRET SIMPLE :

$H(z)$ est donc la **transformée en** z de (h_n), avec

$$\mathrm{Z}[f_n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

- quelles sont ses propriétés ?
- quelles sont ses conditions d'existence et de convergence ?

$\Rightarrow$ **suites et séries numériques et de fonctions**

Plan

1. Signaux numériques

2. Systèmes numériques

3. Principales propriétés de la TZ

4. Filtres numériques

5. Quelques filtres RIF

6. Synthèse de filtres numériques

3.1 DÉFINITION :

(DÉFINITION) La **transformée en** z d'un signal discret (x_n) est

$$X(z) = Z[f_n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n z^{-n}$$

où z est une variable complexe.

- La TZ peut-être considérée comme une généralisation de la transformée de Fourier (poser $z = e^{i\omega}$)
- La TZ constitue l'outil privilégié pour l'étude des système discrets.
- Elle joue un rôle équivalent à la transformée de Laplace

Par exemple, la TZ permet de représenter un signal possédant une infinité d'échantillons par un ensemble fini de nombres.

3.2 DOMAINE DE CONVERGENCE :

La TZ n'a de sens que si l'on précise le domaine des valeurs de z pour lesquelles la série existe.
Nous montrerons (en Ma3) que le **domaine de convergence** de $X(z)$ est **un anneau du plan complexe** : une TZ converge si

$$R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

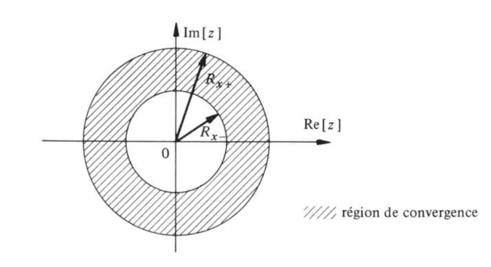


FIGURE – Domaine de convergence d'une TZ

3.3 SIGNAUX ÉLEMENTAIRES :

- TZ de l'impulsion unité

$$Z[\delta_n] = 1$$

- TZ de l'échelon unité

$$Z[u_n] = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

- TZ du signal exponentiel

$$Z[a^n u_n] = \frac{z}{z - a}$$

- TZ de la rampe

$$Z[nu_n] = \frac{z}{(z-1)^2}$$

3.4 PROPRIÉTÉS :

(LINÉARITÉ) Soit $s_n = ax_n + by_n$ alors

$$S(z) = aX(z) + bY(z).$$

- Quel est le domaine de convergence ? (réponse en Ma3)

(SÉQUENCE RETARDÉE) Si $y_n = x_{n-n_0}$ alors

$$Y(z) = z^{-n_0}X(z).$$

- En particulier, si $y_n = x_{n-1}$, $Y(z) = z^{-1}X(z)$.

(SÉQUENCE AVANCÉE) Si $y_n = x_(n + n_0)$ alors

$$Y(z) = z^{n_0}\left[X(z) - \sum_{p=0}^{n_0-1} x(p)z^{-p}\right]$$

- $Z[x(n+1)] = z(X(z) - x(0))$,
- $Z(x(n+2)] = z^2(X(z) - x(0) - z^{-1}x(1))$.

3.4 PROPRIÉTÉS :

(DÉRIVÉE) La dérivée d'une TZ multipliée par $-z$ est la TZ du signal multiplié par n :

$$-z\frac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n x_n z^{-n} = Z[n x_n]$$

(CONVOLUTION) La convolution discrète étant définie par

$$x_n * y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_n,$$

la TZ est

$$Z[x_n * y_n] = X(z)Y(z).$$

3.5 TZ INVERSE :

À partir de la TZ $X(z)$ d'un signal, l'original x_n peut être retrouvé de plusieurs manières :

- en développant $X(z)$ en une série (puissance par exemple)
- en utilisant le théorème des résidus pour calculer

  $$x_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma X(z) z^{n-1} \mathrm{d}z$$

  où Γ est un lacet entourant l'origine, situé dans la couronne de convergence et orienté dans le sens positif.
- par identification des termes (avec éventuellement un formulaire).

Exemple :

$$Z^{-1}\left[\frac{1}{6 - 5z^{-1} + z^{-2}}\right] \tag{1}$$

3.5 TZ INVERSE :

- Le théorème des résidus indique que l'intégrale sur un contour fermé C d'une fonction complexe holomorphe $F(z)$ rationnelle vaut

$$\int_C F(z)\mathrm{d}z = 2i\pi \sum_{p_i \in \mathbb{C}} \text{Résidu}(p_i)$$

où p_i est un pôle de $F(z)$.

(*Fonction holomorphe = fonction à valeurs complexes, définie et dérivable en tout point d'un sous-ensemble ouvert du plan complexe.*)
si p_i est un pôle simple : $\text{Résidu}(p_i) = \lim_{z \to p_i}(z - p_i)F(z)$

- Exemple : calcul de $Z^{-1}[\frac{1}{1+az^{-1}}]$.

3.6 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES :

- Les systèmes discrets sont souvent représentés par une équation aux différences.
- Cette équation donne la sortie en fonction des échantillons présents et passés du signal d'entrée, ainsi que les échantillons passés de la sortie (« mémoire »). Par exemple

$$y(n) = 2y(n-1) + 3x(n) - 2x(n-2). \tag{2}$$

Dans le cas général, on peut écrire :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m). \tag{3}$$

3.6 RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES :

Donc, en appliquant la TZ à gauche et à droite :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} X(z). \tag{4}$$

La résolution de l'équation aux différences, c'est-à-dire l'obtention de $y(n)$, est donc possible en :

- obtenir la TZ de l'équation aux différences,
- manipuler la transformée pour obtenir $Y(z)$,
- appliquer la TZ inverse pour obtenir $y(n)$.

Exemple : résoudre $x_{n+1} = x_n + 2$ avec $x_0 = 3$.

Plan

4.1 FILTRES (GÉNÉRALITÉS) :

Il existe deux formes élémentaires de filtres numériques, selon leur réponse impulsionnelle :

- Réponse Impulsionnelle Finie (RIF) - *Finite Impulse Response (FIR)*
- Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) - *Infinite Impulse Response (IIR)*

4.1 FILTRES (GÉNÉRALITÉS) : EXEMPLE

Considérons le filtre décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = 0,25x(n) + 0,5x(n-1) + 0,25x(n-2). \tag{5}$$

Sa transformée en z est

$$H(z) = 0,25 + 0,5z^{-1} + 0,25z^{-2} \tag{6}$$

On peut donc aisément donner un schéma-bloc équivalent à l'équation aux différences.

4.1 FILTRES (GÉNÉRALITÉS) :

La sortie $y(n)$ d'un filtre RIF ne dépend que d'un nombre M fini d'entrées $x(n-m)$. Il s'agit d'un filtre non-récursif.
Son équation aux différence est de la forme

$$y(n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m). \tag{7}$$

Sa TZ est de la forme

$$H(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}. \tag{8}$$

Il est toujours possible de représenter un tel filtre par un schéma-bloc.

4.1 FILTRES (GÉNÉRALITÉS) : EXEMPLE

Considérons le filtre décrit par l'équation aux différences suivante :

$$y(n) = x(n) + a_1 y(n-1) + a_2 y(n-2). \tag{9}$$

Sa transformée en z est

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}. \tag{10}$$

On peut donc aisément donner un schéma-bloc équivalent à l'équation aux différences.

4.1 FILTRES (GÉNÉRALITÉS) :

La sortie $y(k)$ d'un filtre RII dépend

- d'un nombre M fini d'entrées $x(k-m)$.
- et d'un nombre N fini de sorties retardées $y(k-n)$.

Son équation aux différence est de la forme

$$\sum_{n=0}^{N} a_n y(k-n) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(k-m). \tag{11}$$

Sa TZ est de la forme

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{n=0}^{N} a_n z^{-n}} \tag{12}$$

Il est toujours possible de représenter un tel filtre par un schéma-bloc.

4.1 FILTRES (GÉNÉRALITÉS) : FILTRE RIF

(+) Le délai de réponse est le même pour toutes les fréquences. La phase d'un filtre non-récursif est linéaire avec la fréquence. On dit que c'est un filtre linéaire.
$\Rightarrow$ Le signal n'est pas dispersé par le filtrage.

(+) Les filtres non-récursifs sont stables. Leur réponse est finie :

$$|x_n| < \infty \Rightarrow |h * x_n| < \infty \tag{13}$$

(+) Il existe des méthodes simples pour les synthétiser (*ie* les concevoir).

4.1 FILTRES (GÉNÉRALITÉS) : FILTRE RIF

(-) Cher en réalisation. Beaucoup d’amplificateurs et de retards : beaucoup de calculs.

(-) Le retard entre l’entrée et la sortie correspond à la longueur du filtre (nb de coefficients). Ce retard peut être long.

4.1 FILTRES (GÉNÉRALITÉS) : FILTRE RII

(+) Faible coût de calcul.

(+) Faible retard. C'est un très bon outil en communication.

(-) Non-linéarité en phase.

(-) Instabilité numérique.

Plan

5.1 FILTRES RIF DÉRIVATEURS :

La dérivée d'une fonction $s(t)$ est définie par

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \lim_{h \to 0^+} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}. \tag{18}$$

▶ Pour un signal numérique $s(n)$ la limite n'existe pas.
⇒ On ne peut calculer la dérivée d'un signal numérique.

5.1 FILTRES RIF DÉRIVATEURS :

- Mais on peut calculer des différences. Par exemple

$$(n=1)\quad \frac{\Delta s(n)}{\Delta n} = s(n) - s(n-1) \tag{19}$$

$$(n=2)\quad \frac{\Delta s(n)}{\Delta n} = \frac{s(n) - s(n-2)}{2} \tag{20}$$

- Ces deux différences correspondent à des filtres :

$$s(n) - s(n-1) \rightsquigarrow s * h_n \text{ avec } h = (-1, 1) \tag{21}$$

$$s(n) - s(n-2) \rightsquigarrow s * h_n \text{ avec } h = (-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \tag{22}$$

- Comment se comportent ces filtres ?

5.1 FILTRES RIF DÉRIVATEURS :

- En calculant leur fonctions de transfert $H(w)$.
- Montrons que

$$H_1(\omega) = |2\sin(\omega/2)| \tag{23}$$

$$\text{et } H_2(\omega) = |\sin(w)|. \tag{24}$$

- On rappelle (cf Ma3) que l'opération de dérivation se traduit dans le domaine fréquentiel par une multiplication par $-i\omega$. La fonction de transfert est donc :

$$D(\omega) = |w|. \tag{25}$$

5.1 FILTRES RIF DÉRIVATEURS :

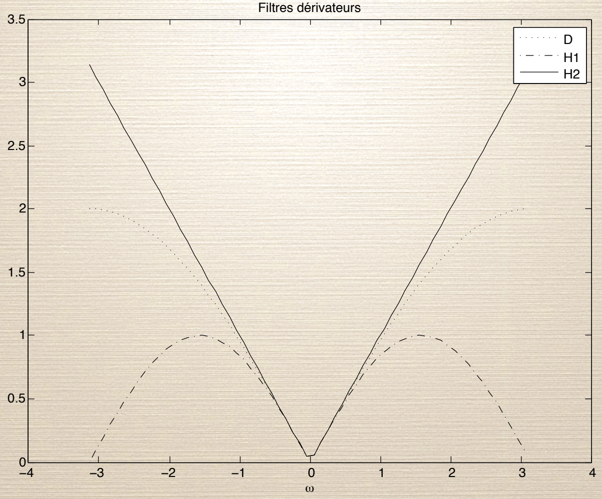


FIGURE – Comparaison des dérivations

- La dérivation "amplifie" les hautes-fréquences

5.2 Filtres de lissage :

Nous allons nous intéresser aux filtres binomiaux, dont les coefficients sont ceux du polynôme :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \tag{26}$$

$$\text{avec } \binom{n}{k} C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{27}$$

► les coeffcients $\binom{n}{k}$ sont obtenus rapidement par le triangle de Pascal :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

5.2 FILTRES DE LISSAGE :

- Ces coefficients définissent des filtres aux propriétés remarquables.

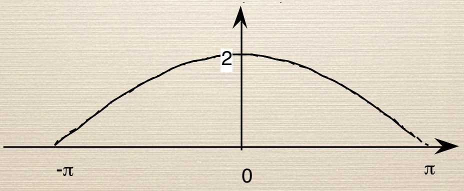
$$b_1 = (1;1) \tag{28}$$
$$b_2 = (1;2;1) \tag{29}$$
$$b_3 = (1;3;3;1) \tag{30}$$
$$\ldots = \ldots$$

- Ils produisent une réponse analogue à celle du filtre Gaussien, discrète et finie.
(mais ce n'est pas une gaussienne).
- Leur fonction de transfert peut être rapidement obtenue

5.2 FILTRES DE LISSAGE :

► Étude du filtre $b_1 = (1;1)$.
Montrons que

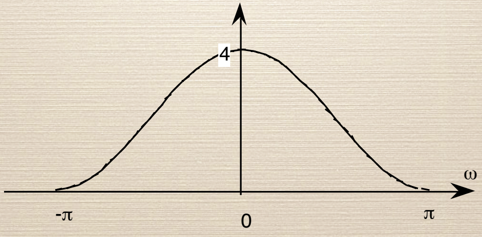
$$|B_1(\omega)| = 2\cos(\omega/2). \tag{31}$$



5.2 FILTRES DE LISSAGE :

► Étude du filtre $b_2 = (1;2;1)$.
Montrons que

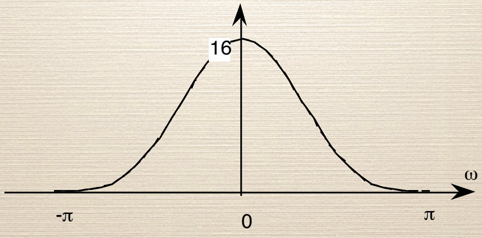
$$|B_2(\omega)| = \left[2\cos(\frac{\omega}{2})\right]^2. \quad (32)$$



5.2 FILTRES DE LISSAGE :

► On montre de la même façon que

$$|B_4(\omega)| = \left[2\cos(\frac{\omega}{2})\right]^4. \tag{33}$$



► Ces filtres réduisent les hautes-fréquences. Ils correspondent à une opération de lissage.
► Il convient de les normaliser, pour obtenir un gain unitaire.

5.3 LISSAGE ET DÉRIVATION :

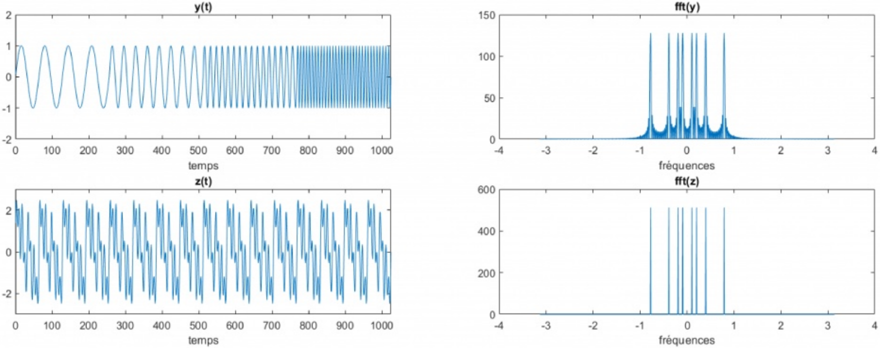
- Il est aisé de vérifier que

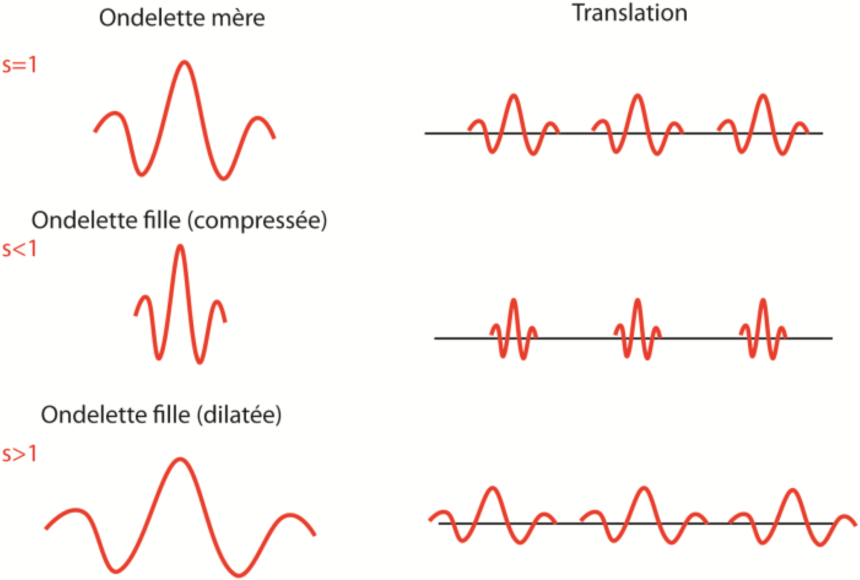
$$b_2 = b_1 * b_1 \tag{34}$$
$$b_3 = b_1 * b_1 * b_1 = b_2 * b_1 \tag{35}$$
$$\ldots = \ldots \tag{36}$$
$$b_n = b_{n-1} * b_1. \tag{37}$$

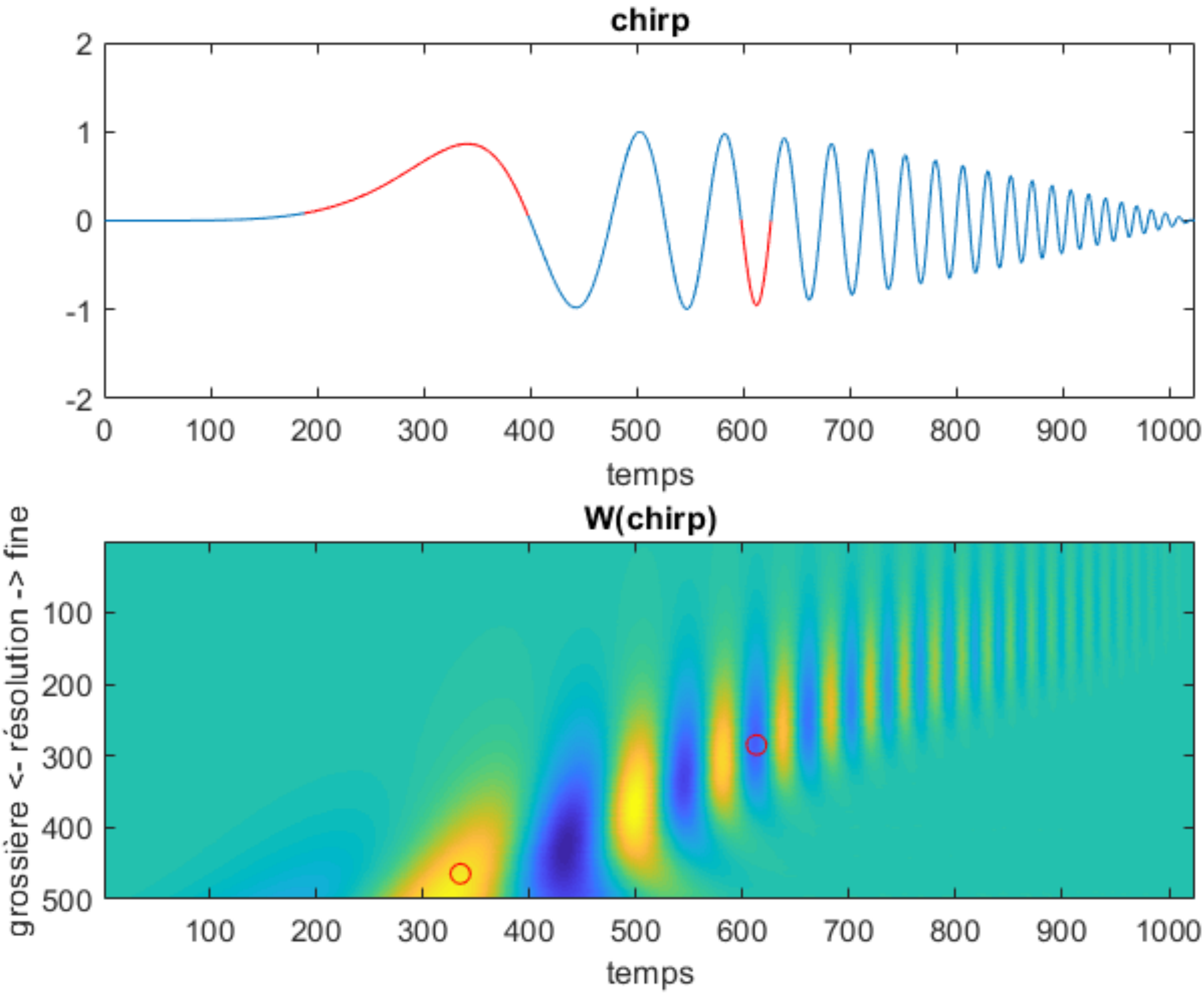
- De même que

$$h_2 = h_1 * b_1. \tag{38}$$

Ce qui permet de mieux comprendre la fonction de transfert $H_2(\omega)$.


y(t)
temps
fft(y)
fréquences
z(t)
temps
fft(z)
fréquences


Ondelette mère
Translation
s=1
Ondelette fille (compressée)
s<1
Ondelette fille (dilatée)
s>1


chirp
2
1
0
-1
-2
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
temps
W(chirp)
grossière <- résolution -> fine
100
200
300
400
500
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000
temps